

OPERADORES III

CÁLCULO VECTORIAL: TEOREMAS INTEGRALES

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: flujo de un vector, Integral de línea, teoremas de Gauss y Stokes
campos conservativo y solenoidal

Programa.

TEMA 2. OPERADORES DIFERENCIALES.

Campo

Escalar. Gradiente.

Derivada Direccional.

LM: Lección Magistral

1 hora

Campo Vectorial. Flujo.

Divergencia. Teorema de la Divergencia.

Duración: 1 hora

LM: Lección Magistral

1 hora

Circulación.

Rotacional.

Teorema del

Rotacional.

LM: Lección Magistral

1 hora

<i>Vectores</i>	<i>3-febrero</i>	<i>12-febre.</i>	<i>4+5</i>
<i>Elcts.Vacio</i>	<i>14-febre.</i>	<i>26-febre.</i>	<i>4+5</i>
<i>Elcts.Condc</i>	<i>26-febre.</i>	<u><i>5-marzo</i></u>	<i>2+(2+1prob)</i>
<i>Elcts.Diele</i>	<i>5-marzo</i>	<i>19-marzo</i>	<i>4+4</i>
<i>Elcts.Diele</i>	<i>19-marzo</i>	<i>21-marzo</i>	<i>+2 (o repaso)</i>

Campos Conservativos.

Laplaciano.

LM: Lección Magistral

1 hora

Resolución de Problemas Tema 2.

RPA: Resolución de problemas en el aula

4 horas

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad}(V) = \nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\iint_{S_{\text{cerr}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Contra el PowerPoint como vía de conocimiento

Los profesores deben tratar al alumnado como adultos, y no como a críos a los que servirles una papilla digital triturada

Javier Rodrigo 13 feb 2024 - 05:00CET

El origen de los 'fantasmas', un tipo de eventos luminosos de la atmósfera



Son destellos de luz que forman parte de una familia de fenómenos como los rayos de tormenta, pero se producen en la mesosfera, a decenas de kilómetros sobre las nubes. El Instituto de Astrofísica de Andalucía encabeza el primer estudio espectroscópico de estos acontecimientos infrecuentes y breves, asociados con compuestos como hierro y níquel.

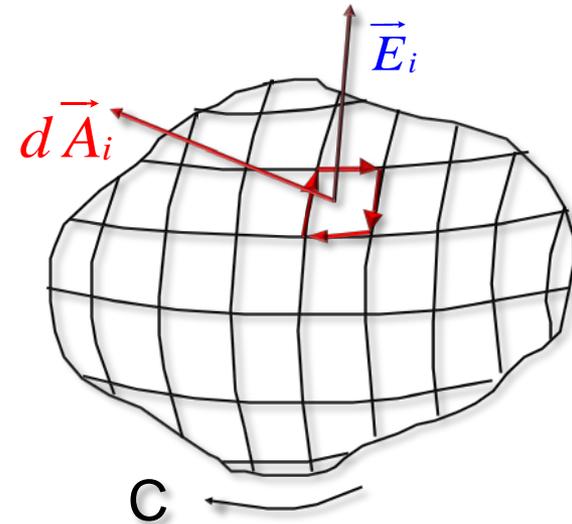
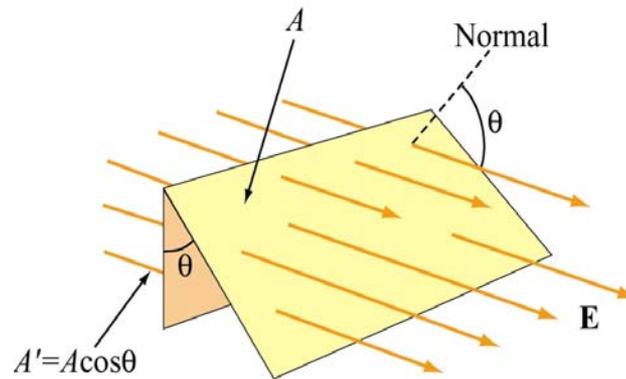
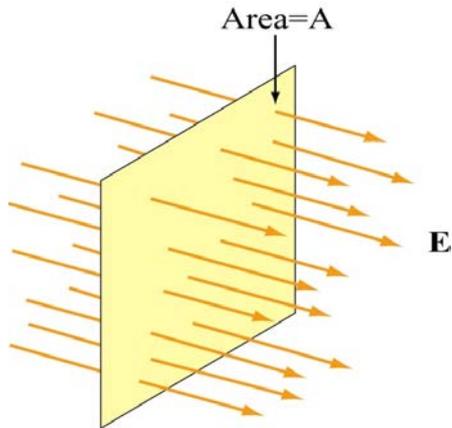
En la mesosfera, una región de la atmósfera que se creía carente de actividad eléctrica, se producen gigantescos destellos luminosos y breves que se descubrieron hace apenas tres décadas. Ahora, el primer estudio espectroscópico de estos eventos, publicado

en [Nature Communications](https://rsef.es/images/Fisica/BoletinEnero24.pdf), los asocia con metales, como el hierro o el níquel, que nunca se habían incluido en los modelos ópticos de los destellos mesosféricos.

<https://rsef.es/images/Fisica/BoletinEnero24.pdf>

Flujo de un vector a través de una superficie.

- Otra forma de caracterizar vector campo: **Flujo del vector** a través de superficie S de área A.



$$\Phi_E = EA$$

$$\Phi_E = EA \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$\Phi_E = \sum_i E_i A_i \cos \theta_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}(P_i) \cdot \vec{A}_i$$

- La suma sobre elementos de superficie infinitesimalmente pequeños da integral de superficie, o integral doble. El flujo da idea de la intensidad o densidad de líneas de fuerza perpendiculares a S que la atraviesan. **Notaciones:**

$$\Phi = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ A \rightarrow dA}} \sum_{i=1}^N \vec{E}(P_i) \cdot \vec{A}_i = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA \equiv \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Teorema de Gauss o de la divergencia

- Si la **superficie es cerrada** se representa alternativamente como:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S \text{ cerrada}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \dots$$

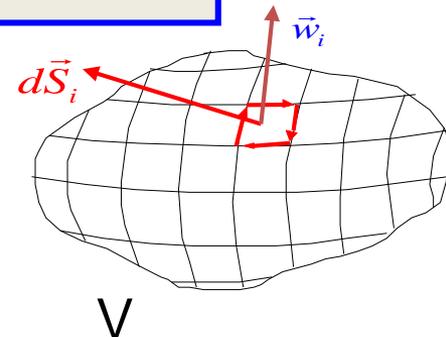
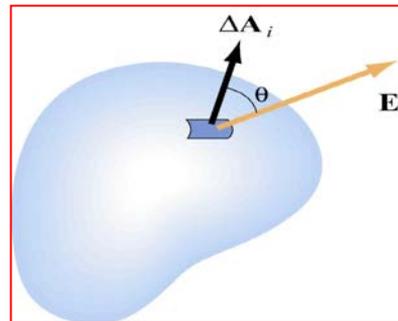
- Si la superficie es cerrada el balance de líneas de campo entrantes-salientes puede no ser nulo. Pueden crearse o destruirse líneas en el **volumen encerrado** por S (hay fuentes/sumedros de líneas).

- La integral doble puede calcularse por una **integral de volumen** usando el **Teorema de Gauss o de la Divergencia**: (ver demostración del final)

$$\iint_{S_{\text{cerr}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV$$

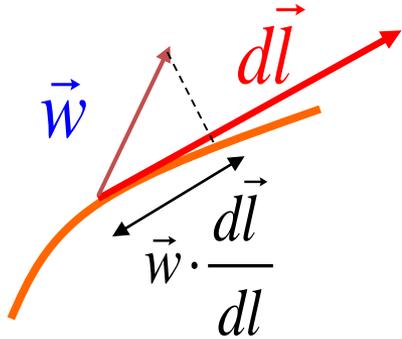


Ejm. Problemas: 2.3, 2.4



Circulación de un vector sobre una curva

- Entre dos puntos A y B de una curva simple Γ la integral de línea de un campo pondera o da idea de la intensidad de la **proyección del vector a lo largo de la curva**. Se define **integral de línea** del vector a lo largo de la curva entre los puntos dados:



Si \vec{w} uniforme: $C = \vec{w} \cdot \Delta \vec{l} = |\vec{w}| |\Delta \vec{l}| \cos \alpha$

En general $C = \sum_{i=1}^N \vec{w}(P_i) \cdot \Delta \vec{l}_i \rightarrow C = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} C_i = \int_{A, \Gamma}^B \vec{w} \cdot d\vec{l}$

$$C_{A,B} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{w} \cdot d\vec{l} = - \int_{B(\Gamma)}^A \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \rightarrow d\vec{l}_{1,2} = -d\vec{l}_{2,1}$$

$$C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1} \vec{w} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} = C_{\Gamma}$$

- La **integral de línea** en una curva es la suma de las integrales de línea sobre segmentos de curva. Interesa el caso de **circulación C de un vector que es su integral de línea** a lo largo de curva Γ cerrada simple

$$C = \oint \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Ejm. Trabajo } W = \int_{A, \gamma}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

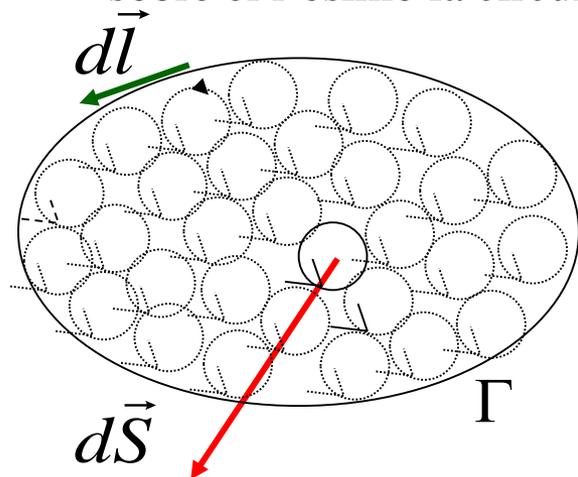
Ejm. Problemas: 2.6, 2.7

Teorema de Stokes o del rotacional:

- La circulación de un vector a lo largo de una curva cerrada simple coincide con el flujo de su rotacional a través de *cualquier superficie* (abierta) apoyada en el contorno en la curva:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- S superficie **orientada**, simple, regular y Γ su curva frontera, regular, cerrada, simple y **orientada**.
- Se demuestra *descomponiendo la curva en rectángulos elementales* y evaluando sobre el i -ésimo la circulación del vector para pasar a sumar después (ver Th Gauss)



Si la **curva colapsa a un punto**, la circulación tiende a 0 y S va a una superficie cerrada, dando la identidad:

$$0 \leftarrow \oint_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{S \rightarrow \\ \text{cerrada}}} \nabla \times \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) dv \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) = \text{div}(\text{rot } \vec{w}) = 0$$

Ejm. Problemas: 2.4, 2.5

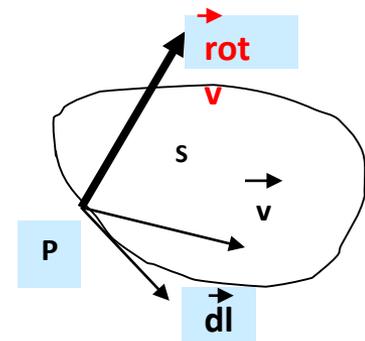
Definiciones intrínsecas y significado físico:

- **Definición intrínseca** (independiente del sistema coordenado) **de la divergencia:** *flujo por unidad de volumen a través de una superficie elemental cerrada que rodee el punto P y que encierra un volumen arbitrariamente pequeño.*
- Si no es cero se dice que hay **fuentes** (o **sumideros**) de líneas de campo en P.

$$\frac{d\Phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{v} \cdot \vec{ds}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \int dV}{\Delta V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

- La proyección del vector *rot v* en la dirección normal a una superficie en un punto P coincide con la circulación del vector, por cada unidad de área, a lo largo de la curva-contorno de S, el rotor tiene **sentido** de avance de un sacacorchos girado en el sentido en que se computa la circulación: (tomando límite del área a cero en un entorno del punto P)

$$\frac{dC_\gamma}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \iint dS}{\Delta S} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_n$$



- **Asociación formal:** Divergencia \rightarrow flujo; Rotacional \rightarrow circulación

Definiciones intrínsecas de divergencia y rotor. Comentarios

- También se observa que la $\text{div}(\mathbf{v})$ da una medida de la variación de flujo del vector a través de la superficie elemental con respecto al volumen que contenga al punto P.

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \equiv \frac{d\Phi}{dV}$$

Los signos posibles de la divergencia serán:

$\text{div } \vec{v} > 0$ en (un entorno) de P sale más flujo que entra, P es **fuelle** de líneas de campo, nacen líneas.

$\text{div } \vec{v} < 0$ en (un entorno) de P hay más flujo entrante que saliente en P, donde mueren líneas de campo. P es un **sumidero** de líneas de campo.

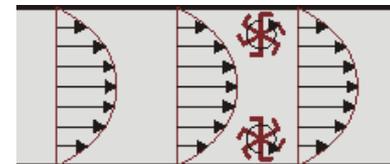
$\text{div } \vec{v} = 0$ en P se equilibra flujo entrante y saliente

• ¿Es cierto, como suele decirse, que si la divergencia del vector campo es cero en todo punto, como es el caso del campo magnético \mathbf{B} , las líneas de campo son cerradas?

• Se dice que “el rotacional mide la **tendencia** de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto” Evaluar, en coord. cilíndricas el rotor de los unitarios radial y angular y discutir resultados. (sol. 0 y \mathbf{k}/r)

• Probar que las líneas del campo $\mathbf{g} = Hy^2 \mathbf{i}$ (probl.2.7 son rectas y que $\text{rot}(\mathbf{v})$ no es cero. ¿En qué dirección es más intenso \mathbf{v} ?

- Si el rotacional de \mathbf{v} es cero en una región del espacio, el campo se dice **irrotacional** en la misma y puede expresarse como el **gradiente de un campo escalar** (ver: campo conservativo).



Definiciones: campo conservativo y potencial escalar.

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

- Si un campo vectorial se obtiene del gradiente de un escalar T , su integral de línea entre dos puntos no depende del camino o curva Γ (al campo escalar T del que se obtiene el campo se le llama función **potencial escalar**).

$$\vec{E} = \nabla T = \text{grad } T \Leftrightarrow \int_{A_\Gamma}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A_\Gamma}^P \nabla T \cdot d\vec{l} = T(P) - T(A) \quad (\text{y } \nabla \wedge \vec{E} = 0)$$

- Si la integral de línea de un campo vectorial entre dos puntos no depende de la curva Γ , se puede definir un campo escalar T tal que su gradiente es el campo.

$$\text{Demo.: } \int_{A_\Gamma}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A_\Gamma}^P \text{grad } T \cdot d\vec{l} = \int_{A_\Gamma}^P dT = T(P) - T(A)$$

- La circulación del **campo conservativo** es nula, luego la integral de línea entre dos puntos es independiente de la curva seguida que los conecte:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\forall \Gamma}{=} 0 \Leftrightarrow \int_{A_{\Gamma_1}}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\forall \Gamma_1, \Gamma_2}{=} \int_{A_{\Gamma_2}}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = T(P) - T(A)$$

$$\text{Ejm. } \vec{E} = K \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\nabla \left(K \frac{q}{r} \right) = -\nabla V \Rightarrow T = -V = -K \frac{q}{r}$$

Definiciones: Campo solenoidal y potencial vector.

CAMPO SOLENOIDAL

- Es un campo de divergencia nula -en un dominio dado- es tal que

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{por tanto, para } S \text{ cerrada } \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0)$$

- Entonces el campo se puede *expresar como el rotacional* de un vector:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_{S \text{ abierta}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S \text{ abierta}} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- Es decir: El flujo de **B** a través de una superficie abierta S coincide con la circulación del vector **A** (**potencial vector**, se llama) que lo genera a lo largo de la curva contorno de S.

- Ejm. Todo campo uniforme **v** es conservativo: $T = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ (superficies equipotenciales: planos)
- Ejm. Todo campo uniforme **v** es solenoidal: $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ (comprobadlo)

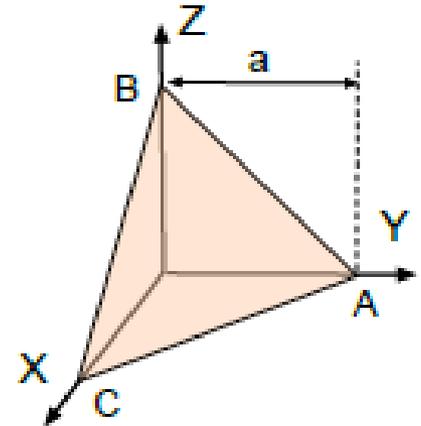
• Problema 2.3

Para el campo vectorial,

$$\mathbf{e} = (Dx)\mathbf{i} + (2 - Hyz)\mathbf{j} + \left(\frac{Hz^2}{2} - 1\right)\mathbf{k}$$

donde D y H son constantes se pide calcular:

- Su divergencia $\nabla \cdot \mathbf{e}$
- Su rotacional $\nabla \times \mathbf{e}$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{e})$ en el punto (a, a, a) del espacio con $a > 0$.
- El flujo del campo \mathbf{e} a través de una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $3a$
- El flujo de \mathbf{e} a través de la superficie del triángulo ABC de la figura con vértices en los puntos $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ y $(a, 0, 0)$.



Solución :

$$(a) \nabla \cdot \mathbf{e} = D ; (b) \nabla \times \mathbf{e} = Hy\mathbf{i} ; (c) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}) = -H\mathbf{k}$$

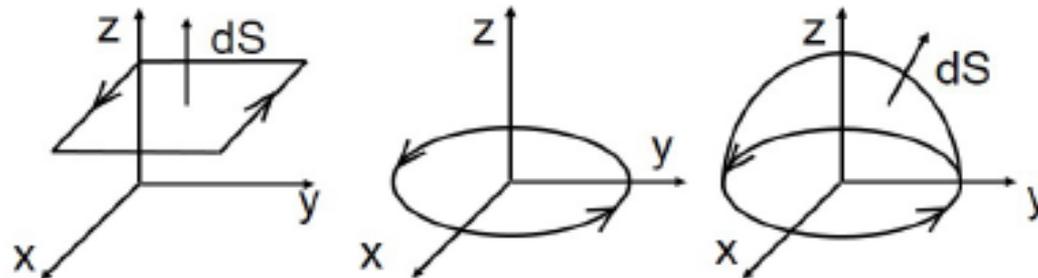
$$(d) \phi = 36D\pi a^3 ; (e) \phi = Da^3/6 + a^2/2$$

• Problema 2.4

Se pide calcular para el campo vectorial,

$$\mathbf{A} = 2xz\mathbf{i} + (z \sin x)\mathbf{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\mathbf{k}$$

- El valor de la circulación de $\nabla \times \mathbf{A}$ a lo largo del cuadrado de lado 2 paralelo al plano (X, Y) situado en $z = 2$ y recorrido en el sentido que se indica en la figura.
- La circulación de \mathbf{A} a lo largo de la circunferencia de radio 2 situada sobre el plano (X, Y) y centrada en el origen de coordenadas con el sentido indicado.
- El flujo de $\nabla \times \mathbf{A}$ a través de la superficie del cuadrado definido en el primer apartado.
- El flujo de \mathbf{A} a través de la semiesfera de radio $R = 2$ centrada en el origen que se apoya en la circunferencia del segundo apartado (ver figura).



Solución :

$$(a) C = -8 ; (b) C = 0 ; (c) \phi = 4 \sin 2 ; (d) \phi = 8\pi$$

• Problema 2.5

Calcular la integral de línea de los siguientes campos vectoriales,

$$\mathbf{a} = (x^2 y) \mathbf{i} + x^5 \mathbf{j} + x^{-1} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = (2xy) \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$$

desde el origen $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 4, 0)$ a lo largo de las curvas:

1. $y = 4x$; $z = 0$

2. $y = 4x^2$; $z = 0$

(1) $I_a = 5/3$; $I_b = 4$

(2) $I_a = 68/35$; $I_b = 4$

• Problema 2.6

Para el campo vectorial,

$$\mathbf{c} = (Ax) \mathbf{i} + (By^2) \mathbf{j} + (Cz) \mathbf{k}$$

donde A , B y C son constantes, se pide calcular su integral de línea desde el origen $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 1)$ a lo largo de:

a) La recta $y = x$; $z = x$

b) La curva $y = x^2$; $z = x^3$

Solución :

$$(a) I_a = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2} ; (b) I_b = \frac{3A + 2B + 3C}{6}$$

Problemas

● Problema 2.6

Para el campo vectorial,

$$\mathbf{c} = (Ax)\mathbf{i} + (By^2)\mathbf{j} + (Cz)\mathbf{k}$$

donde A , B y C son constantes, se pide calcular su integral de línea desde el origen $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 1)$ a lo largo de:

a) La recta $y = x$; $z = x$

b) La curva $y = x^2$; $z = x^3$

(a) $I_a = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2}$; (b) $I_b = \frac{3A + 2B + 3C}{6}$

● Problema 2.7

Para el campo vectorial $\mathbf{g} = Hy^2\mathbf{i}$ siendo H una constante se pide:

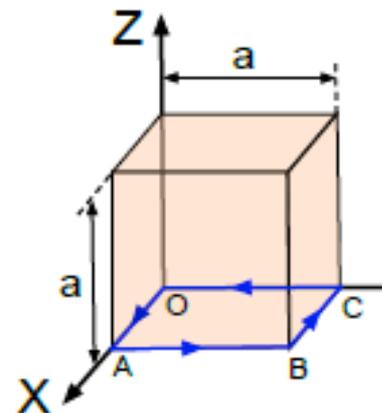
- Calcular $\nabla \cdot \mathbf{g}$, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{g})$ y $\nabla \times \mathbf{g}$.
- Comprobar el teorema de la divergencia para un cubo de lado a de la figura.
- Comprobar el teorema de Stokes en el cuadrado de lado a de la figura recorrido en el sentido $OABO$.

Solución :

(a) $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$; $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{g}) = 0$; $\nabla \times \mathbf{g} = -2Hy\mathbf{k}$

(b) $\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV = 0$

(c) $\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{s} = -Ha^3$



Problemas

• Problema 2.8

Para el campo vectorial $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ donde el escalar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de un punto del espacio al origen y $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ el vector unitario radial en coordenadas esféricas calcular:

- El gradiente ∇r
- La divergencia $\nabla \cdot \mathbf{r}$
- El gradiente $\nabla (1/r)$
- La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/r)$

• Problema 2.9

Para el campo vectorial $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{u}_\rho$ siendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia de un punto del espacio al eje Z y $\mathbf{u}_\rho = (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})$ el vector unitario radial en coordenadas cilíndricas, donde $\sin \varphi = y/\rho$ y $\cos \varphi = x/\rho$ calcular:

- El gradiente $\nabla \rho$
- La divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}$
- El gradiente $\nabla (1/\rho)$
- La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/\rho)$

Obtened, en función de n , el flujo Φ del campo radial (sim. Esférica) $\mathbf{A} = C r^n \mathbf{e}_r$ a través de una *superficie esférica* de radio R centrada en el origen y particularizar para n del caso 2) ¿es nulo Φ ? . La misma cuestión para el campo $\mathbf{B} = C \rho^n \mathbf{u}_\rho$ (radial en cilíndricas) con flujo a través de un cilindro de radio R y altura H .

$$1) \quad \nabla r = \bar{u}_r, \quad \nabla \cdot \bar{r} = 3, \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \bar{u}_r, \quad \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

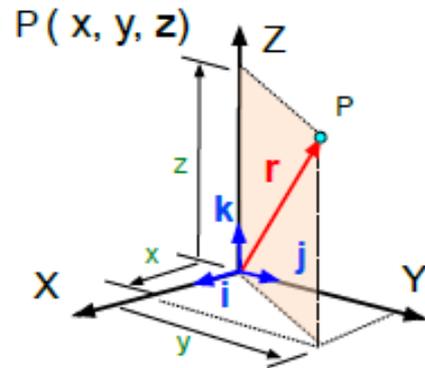
$$2) \quad n = -2$$

$$3) \quad \nabla \rho = \bar{u}_\rho, \quad \nabla \cdot \bar{\rho} = 2, \quad \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \bar{u}_\rho, \quad \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^3}$$

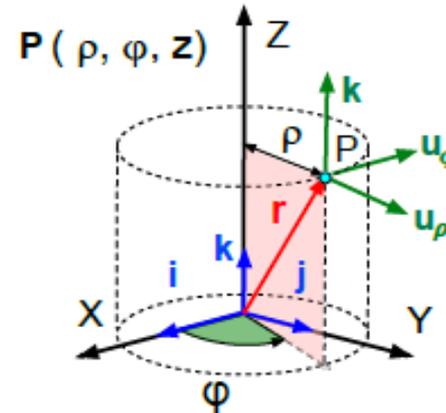
$$4) \quad n = -1$$

Comentarios y Apéndice. Otros sistemas de coordenadas

$$\mathbf{u}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$$



(a) Coordenadas cartesianas con sus vectores $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ unitarios.



(b) Coordenadas cilíndricas con los vectores $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{k})$ unitarios.

Figura 1: Esquemas del vector de posición \mathbf{r} de un punto P en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\varphi \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_\rho \quad , \quad \mathbf{u}_\rho \wedge \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{k}$$

vector: $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \phi, z) \leftrightarrow (r, \phi, z) \leftrightarrow (r_\perp, \phi, z)$$

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$\mathbf{e}_j, \mathbf{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j, \text{ para } j = \rho, r, \varphi, x, \dots$$

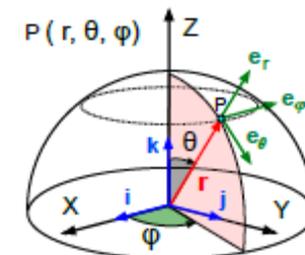


Figura 2: Coordenadas esféricas del punto P .

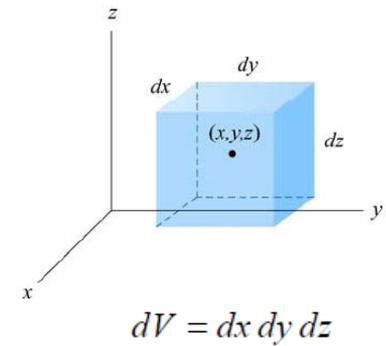
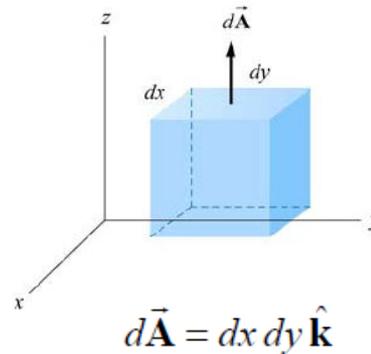
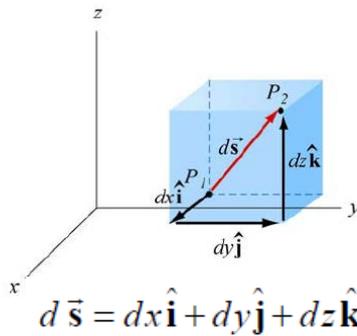
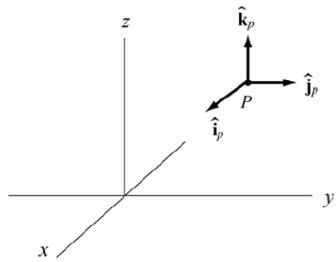
$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Operadores en otros sistemas de coordenadas

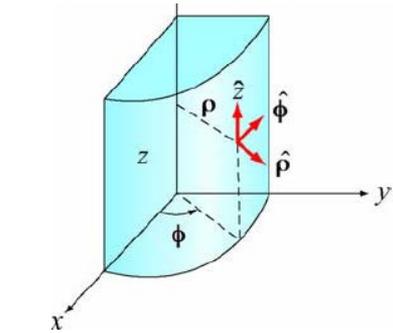
	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
Transformación		$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
Elemento de longitud	$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}$	$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}$
Elemento de volumen	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\varphi dz$	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
Elemento de superficie	$dS_x = dy dz$ $dS_y = dx dz$ $dS_z = dx dy$	$dS_\rho = \rho d\varphi dz$ $dS_\varphi = d\rho dz$ $dS_z = \rho d\rho d\varphi$	$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ $dS_\varphi = r dr d\theta$ $dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$
Gradiente	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho P_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi}$ $+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_\theta)$
Rotacional	$\nabla \wedge \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$	$\nabla \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_\rho & \rho P_\varphi & P_z \end{vmatrix}$	$\nabla \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ P_r & r P_\theta & r \sin \theta P_\varphi \end{vmatrix}$
Laplaciano	$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$ $+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$

Cuadro 1: Los operadores diferenciales en los sistemas coordenados más comunes. Los vectores $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{k})$ son unitarios en las coordenadas cilíndricas y $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ en esféricas indicados en las figuras 1 y 2.

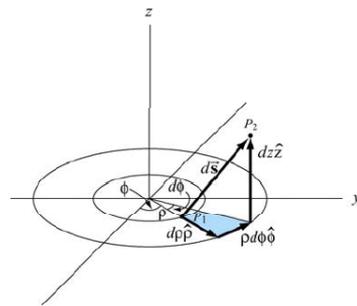
Coordinates. Line, surface and volume Elements.



$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi$$

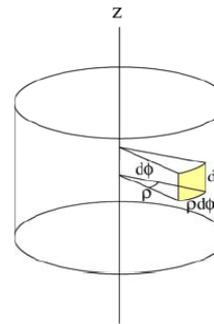


$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

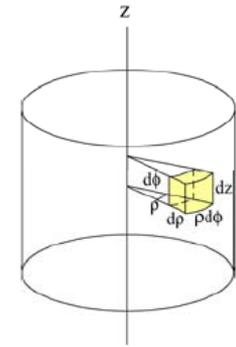


$$d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$$

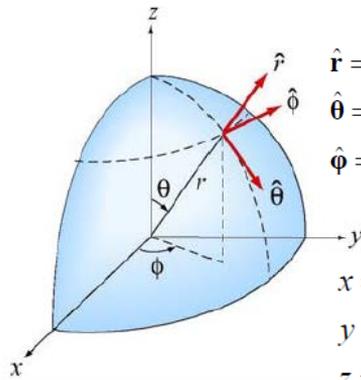
$$d\vec{A} = \rho d\phi d\rho \hat{k}$$



$$dA = \rho d\phi dz$$



$$dV = \rho d\phi d\rho dz$$



$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

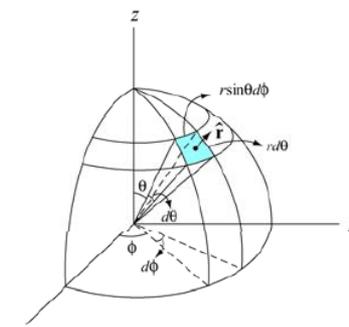
$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

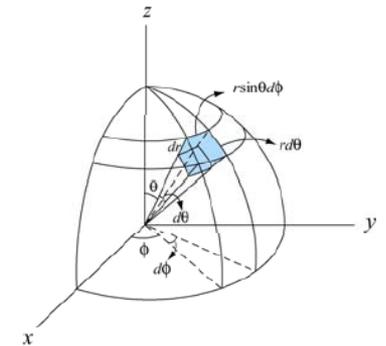
$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

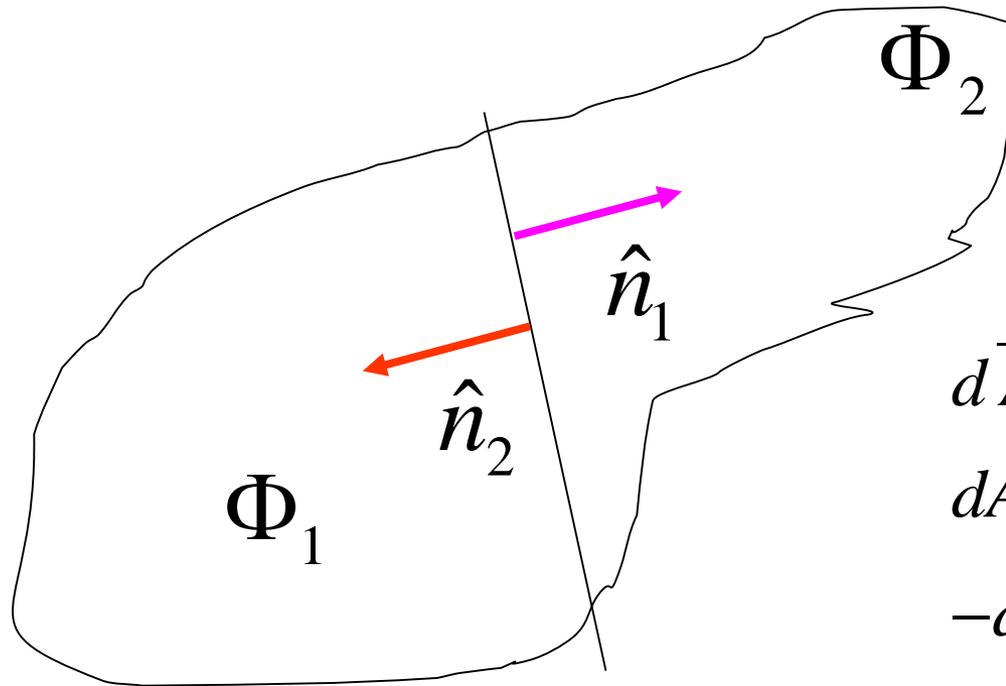


$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

NOTAS:Th de Gauss. Esbozo de demostración no rigurosa

Descomponiendo un dominio (conexo) de volumen V en dos: el flujo sólo es suma de los flujos sobre caras exteriores

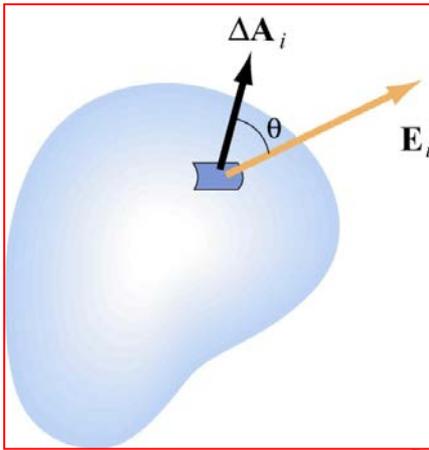
$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_1 + \Phi_{1,2} + \Phi_{2,1} + \Phi_2$$



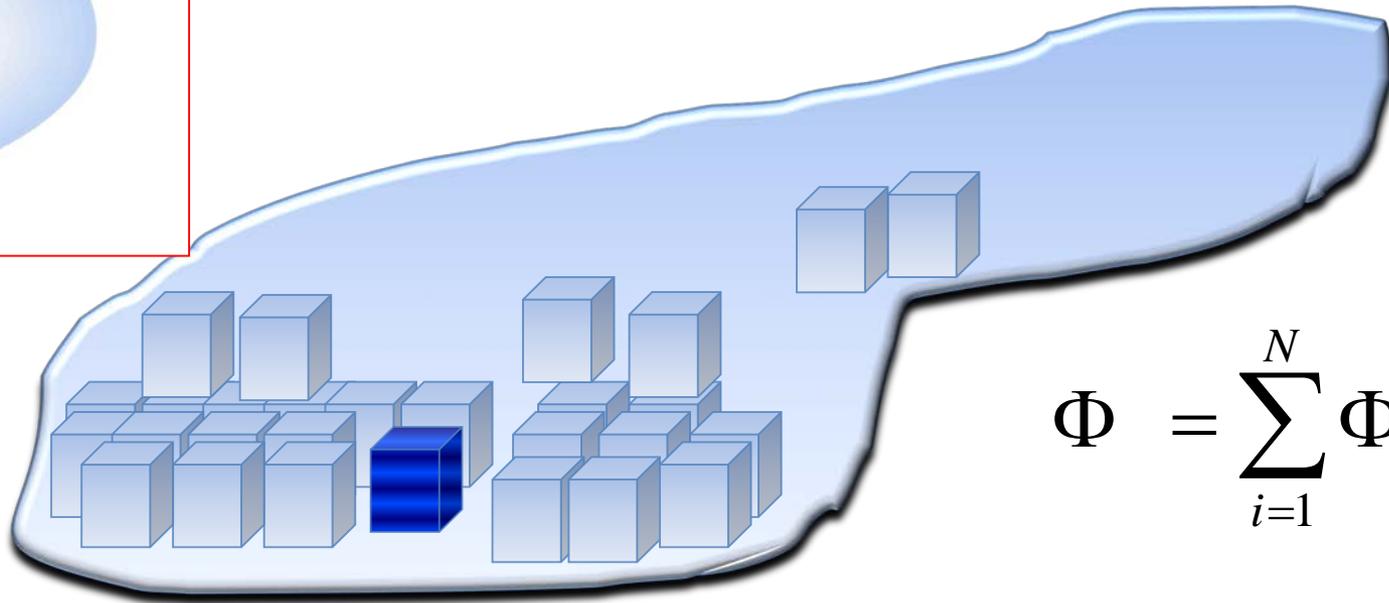
$$\begin{aligned} d\vec{A}_{1,2} &= \\ dA \hat{n}_1 &= -dA \hat{n}_2 = \\ -d\vec{A}_{1,2} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 = -\hat{n}_2 &\Rightarrow \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}_{1,2} + \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}_{2,1} = \Phi_{1,2} + \Phi_{2,1} = 0 \\ &\Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \end{aligned}$$

Esbozo de demostración no rigurosa:



- Aplicando el resultado a N elementos de volumen ΔV o celdas que aproximen V y evaluando en el flujo por la i -ésima celda:



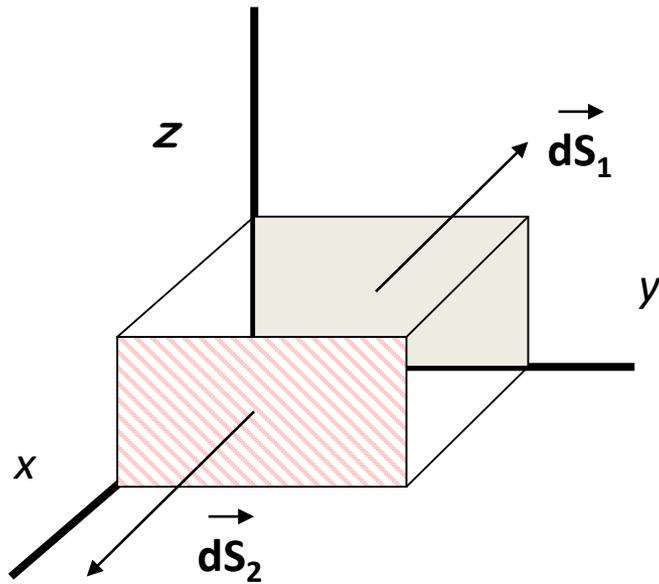
$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

$$\Phi_{elemento\ i} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$

- Sobre un elemento paralelepédico de volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \ll V$ se obtiene el flujo aproximado usando desarrollo de Taylor a primer orden, como por ejemplo :

$$E(x + \Delta x, y, z) \simeq E(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} E(x, y, z) + \dots \text{ etc.}$$

Esbozo de demostración :



Flujo del vector a través de las superficies normales al eje x con $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow dV = dx dy dz$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Phi_{1x} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = E_x(x, y, z) (-dydz) \\ d\Phi_{2x} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = E_x(x + dx, y, z) dydz \\ = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) (dydz) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

Haciendo lo mismo sobre los ejes OY y OZ y sumando $dV = dx dy dz$:

$$\Phi_{\text{elemento}} = \left[\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Y sumando ahora a todos los paralelepípedos elementales: (¿qué condiciones se exigen al vector ?)

$$\Phi = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \|\Delta V_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \Phi_{\text{elemento } i} = \int_V \left[\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right] dV$$

Th de Stokes. Demostración no formal: muy similar a la del Th de Gauss

- A lo largo del *rectángulo elemental* en $x=cte$, se evalúa la circulación del vector...
- Usando desarrollo de Taylor a primer orden en dz , dx , etc. para las componentes z e y del vector: (ver problema 2.5)

$$v_y dy + v_z(x, y + dy, z) dz - v_y(x, y, z + dz) dy - v_z dz \rightarrow$$

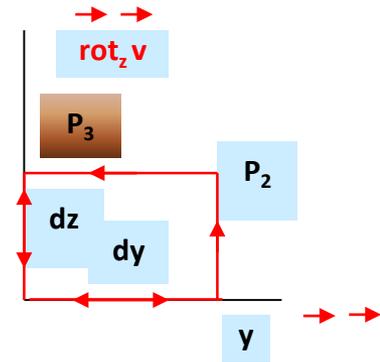
$$\text{con } v_z(x, y + dy, z) \simeq v_z + dy \frac{\partial v_z}{\partial y}, \text{ etc,}$$

$$v_y dy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy \right) dz - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) dy - v_z dz =$$

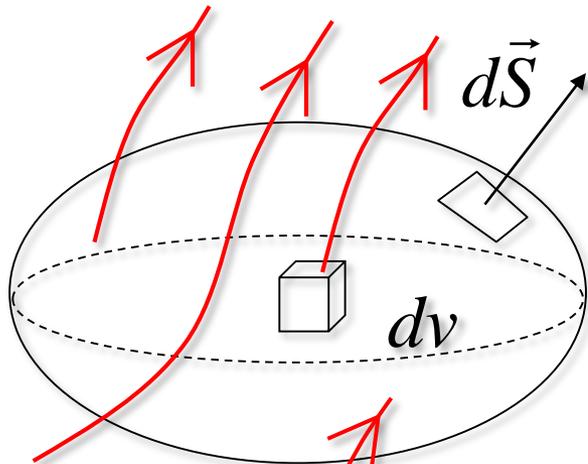
$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy dz = (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{i} dS_x)$$

- Se repite el proceso para rectángulos elementales en otros planos
- (rotar x, y, z en los cálculos) dando:

$$\text{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \rightarrow \oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{ds}$$



Hay un SEGUNDO TEOREMA DE GAUSS:



$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = \int_{vol.} dv \nabla \times \mathbf{E}$$

Cambio formal: $\bullet \leftrightarrow \times$

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_{vol.} dv \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Ejm. si $\mathbf{E} = \text{grad} (V(\mathbf{r}))$, $\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = 0$, $\forall S_{\text{cerrada simple}}$

Significado físico no directo, pero importante para deducciones matemáticas (con consecuencias físicas relevantes).

Sugerencia: aplicarlo al campo eléctrico creado por carga puntual en el origen siendo S la esfera de radio R que rodea la carga, interpretar el resultado .