

OPERADORES II

Cálculo vectorial: Operadores diferenciales

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Herramientas matemáticas ,derivada parcial, gradiente, rotacional...

Programa.

TEMA 2. OPERADORES DIFERENCIALES.

Campo

Escalar. Gradiente.

Derivada Direccional.

LM: Lección Magistral

1 hora

Campo Vectorial. Flujo.

Divergencia. Teorema de la Divergencia.

Duración: 1 hora

LM: Lección Magistral

1 hora

Circulación.

Rotacional.

Teorema del Rotacional.

LM: Lección Magistral

1 hora

<i>Vectores</i>	<i>3-febrero</i>	<i>12-febre.</i>	<i>4+5</i>
<i>Elcts.Vació</i>	<i>14-febre.</i>	<i>26-febre.</i>	<i>4+5</i>
<i>Elcts.Conde</i>	<i>26-febre.</i>	<i>5-marzo</i>	<i>2+(2+1prob)</i>
<i>Elcts.Diele</i>	<i>5-marzo</i>	<i>19-marzo</i>	<i>4+4</i>
<i>Elcts.Diele</i>	<i>19-marzo</i>	<i>21-marzo</i>	<i>+2 (o repaso)</i>

Campos Conservativos.

Laplaciano.

LM: Lección Magistral

1 hora

Resolución de Problemas Tema 2.

RPA: Resolución de problemas en el aula

4 horas



$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad}(V) = \nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\iint_{S_{\text{cerr}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

Introducción. Motivación.

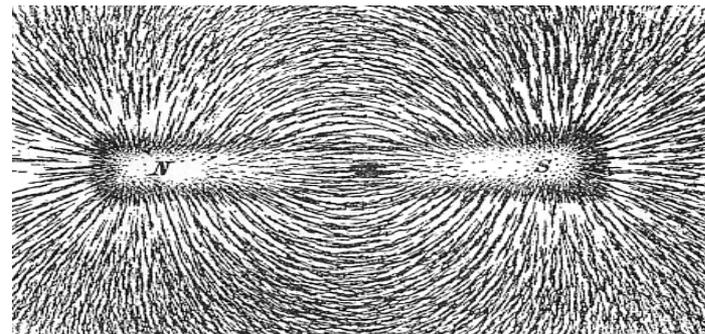
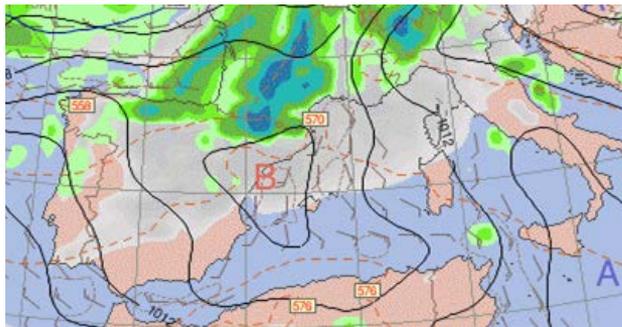
Campos en física ¿qué es un campo? ¿cómo visualizarlo y medirlo?. Matemáticamente, es una aplicación unívoca desde un punto de un espacio a otro.

$\text{Notación: } \begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{cases}$	vector: $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$
	$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \phi, z) \leftrightarrow (r, \phi, z) \leftrightarrow (r_{\perp}, \phi, z)$
	$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$
	$\mathbf{e}_j, \mathbf{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j, \text{ para } j = \rho, r, \varphi, \theta, \dots$

- Aquí es propiedad mensurable escalar o vectorial dependiente del punto de medida:

$g(\mathbf{r}; t) \equiv g(x, y, z; t) \text{ a } t \text{ fijo } \dots$	}	$T = T(\mathbf{r}) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
		$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r}) ; \quad \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
		$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = i w_x(x, y, z) + j w_y(x, y, z) + k w_z(x, y, z)$

Visualización: campo escalar por *superficies isoescalares*, el vectorial por *líneas de campo*:



Gradiente de un escalar. Derivada direccional.

- La variación infinitesimal de la propiedad escalar p será:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

- Reescrita como producto escalar, define el vector gradiente de p

$$\left. \begin{aligned} dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot d\vec{l} \\ d\vec{l} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dp = \text{grad } p \cdot d\vec{l} = \nabla p \cdot d\vec{l}$$

- Define el **operador gradiente** que se representa por **Nabla**:

$$\text{grad } p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{operador Nabla})$$

- La dirección del vector desplazamiento elemental $d\vec{l}$ puede estar **orientada** sobre una curva dada. Ejm: sobre la *recta* $x=9y=3z$, $d\vec{l} = dx \vec{i} + dx/9 \vec{j} + dx/3 \vec{k}$

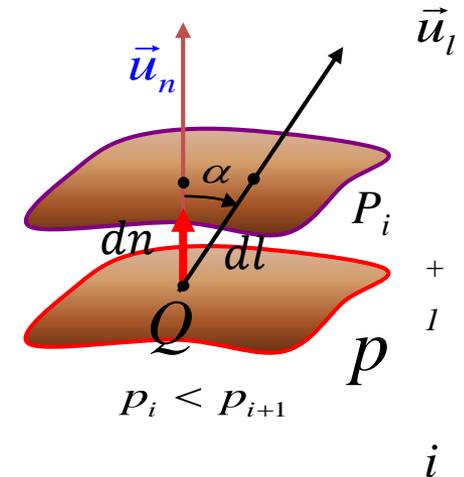
Derivada direccional

- La variación de p puede medirse a lo largo de una dirección dada.
- Si dl yace sobre un segmento infinitesimal de curva con orientación dada \mathbf{u} .

$$dp = \text{grad } p \cdot d\vec{l} = \text{grad } p \cdot (dl \vec{u}_l) = (\nabla p \cdot \vec{u}_l) dl$$

$$\frac{dp}{dl} = \nabla p \cdot \vec{u}_l = \text{grad } p \cdot \vec{u}_l$$

- Define la **derivada direccional** de p en el punto Q siguiendo la orientación del versor \mathbf{u} .
- Si \mathbf{u} yace sobre **puntos de una curva γ** , puede encontrarse tal curva que maximiza la derivada. El **módulo del gradiente da la derivada direccional máxima**: $\text{grad } p$, se orienta hacia donde p aumenta.



Así, si γ está sobre una superficie $p=cte=K$, la derivada direccional de p a lo largo de γ será nula.

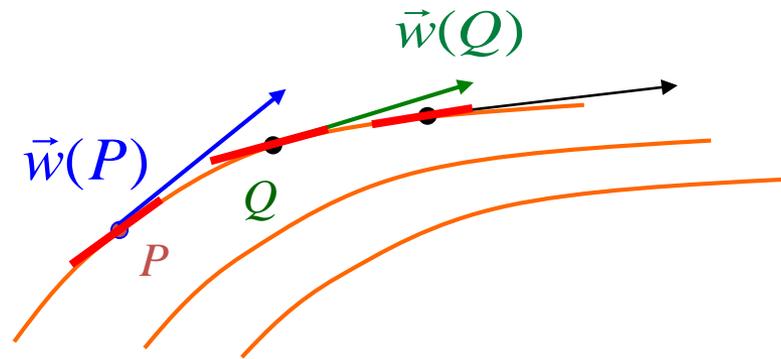
El vector gradiente es normal a las superficies equiescalares $p=K$ y se orienta en sentido creciente de valores de K

$$\frac{dp}{dl} = \frac{dp}{dn} \cdot \frac{dn}{dl} = \frac{dp}{dn} \cos \alpha = \frac{dp}{dn} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_l$$

$$\frac{dp}{dl} = \text{grad } p \cdot \vec{u}_l \Rightarrow \text{máx} \left| \frac{dp}{dl} \right| = |\nabla p|$$

Divergencia de un vector y rotacional de un vector

- Si \vec{w} es un campo vectorial sus líneas de campo yacerán sobre curvas γ y tangentes a él en cada punto, es decir, las (dos) ecuaciones diferenciales de las curvas vienen de:



$$\vec{w} \parallel d\vec{l} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{w} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_x}{dx} = \frac{w_y}{dy} = \frac{w_z}{dz}$$

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = d\vec{r}$$

- La operación diferencial resultante del *producto formal* del operador gradiente y el vector dado es un escalar, llamado **divergencia** de \vec{w} : (en cartesianas)

$$\text{div } \vec{w} = \nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Ejm. si $\vec{w} = \vec{r} \rightarrow \nabla \cdot \vec{w} = 3$; Probar que si $\vec{v} = \vec{v}(r)$, $\nabla \cdot \vec{v} = \vec{e}_r \cdot \frac{d\vec{v}}{dr}$

Divergencia de un vector y rotacional de un vector

- También la operación siguiente da un vector, el resultante de hacer actuar formalmente el **operador naba vectorialmente** sobre el vector dado \vec{w}

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w} = \nabla \wedge \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \\ \vec{i} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) & \\ (\nabla \times \vec{w})_x = \frac{\partial}{\partial y} w_z - \frac{\partial}{\partial z} w_y, \text{ etc.} & \end{aligned}$$

- Da el operador **rotacional (rotor)** de \vec{w} en coordenadas **cartesianas** (cuidado, ver tablas para otros sistemas coordenados).
- Un **ejemplo** de vector **irrotacional** (sin rotor) es el propio radiovector \vec{r} o *cualquier vector radial* dependiente sólo de su módulo r :

$$\text{Si: } \vec{w}(\vec{r}) = \pm |\vec{w}| (|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{r} = g(r) \vec{r} \Rightarrow \text{rot } \vec{w} = 0$$

- **SIGNIFICADO FÍSICO DE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL**: relacionados con los conceptos de **FLUJO y CIRCULACIÓN** de un vector.

Operadores de segundo orden y algunas propiedades

- También pueden definirse operaciones que dan derivadas segundas de campos escalares y vectoriales, como:

dado $V(\mathbf{r}) \rightarrow \text{grad } V = \nabla V$, $\text{div}(\text{grad } V) = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$ (*Laplaciano de V*)

dado $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, $\text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$, y $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$

IMPORTANTE: (demostrarlo por cálculo directo)

- **La divergencia de un rotacional es cero**, es decir, el rotacional de un vector es un vector solenoidal:

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

- **Y el rotacional de un gradiente es cero, quivales a decir:** el gradiente de un campo escalar es un vector irrotacional:

$$\text{rot } \text{grad}(V) = \nabla \times (\nabla V) = 0$$

- La expresión siguiente **define la laplaciana de un vector:**

$$\text{rot } \text{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) - \text{laplacian}(\mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$
$$\nabla^2 \mathbf{v} = \vec{i} \nabla^2 v_x + \vec{j} \nabla^2 v_y + \vec{k} \nabla^2 v_z \quad (\text{en cartesianas})$$

NOTA: Propiedades

- Siendo en cartesianas:

$$(Laplaciano de V) \rightarrow \nabla^2 V \equiv \Delta V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V$$

- Si T y P son campos escalares, \mathbf{v} y \mathbf{w} campos vectoriales, con a y b constantes escalares, serán útiles las propiedades siguientes (demostración como ejercicio).

$$\begin{aligned} \nabla(aT + bP) &= a\nabla T + b\nabla P & \nabla(TP) &= T\nabla P + P\nabla T \\ \nabla \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= a\nabla \cdot \mathbf{v} + b\nabla \cdot \mathbf{w} & \nabla \cdot (T\mathbf{v}) &= \nabla T \cdot \mathbf{v} + T\nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \wedge (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= a\nabla \wedge \mathbf{v} + b\nabla \wedge \mathbf{w} & \nabla \wedge (T\mathbf{v}) &= \nabla T \wedge \mathbf{v} + T\nabla \wedge \mathbf{v} \\ & & \nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \wedge \mathbf{w} \end{aligned}$$

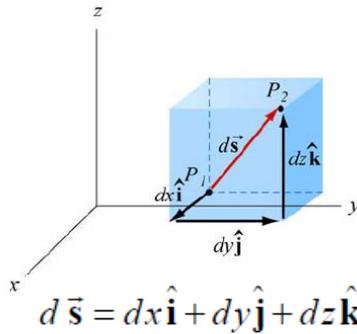
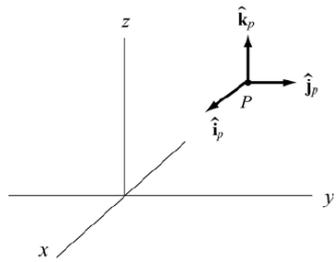
Ejer. Comprobar las relaciones siguientes, que saldrán a menudo en clase:

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{u}_r & \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r & \nabla f(r) &= f'(r) \mathbf{u}_r \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 & \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= 0 \text{ (si } r \neq 0) & \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} &= \frac{2}{r} = \nabla^2 r \\ \nabla \times (g(r)\mathbf{u}_r) &= 0 \text{ con } \mathbf{r} = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & & & \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

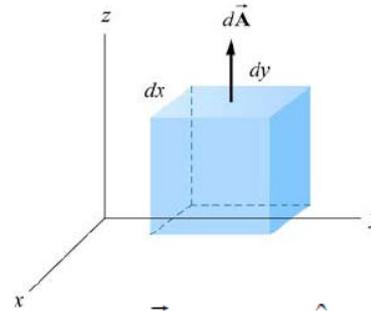
Importante:

Repetir los cálculos con la **sustitución de \mathbf{r} por $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$** , con \mathbf{r}_0 constante (es una traslación de origen)

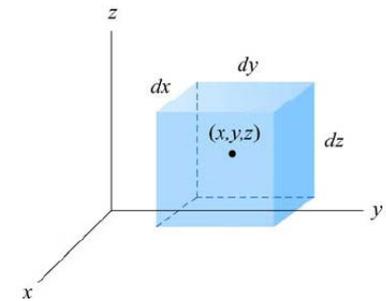
Coordinates. Line, surface and volume Elements.



$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

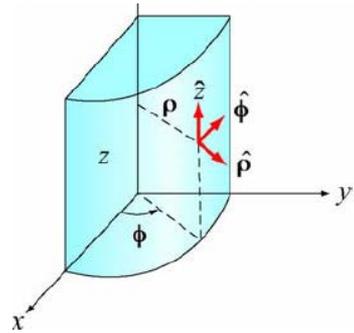


$$d\vec{A} = dx dy \hat{k}$$

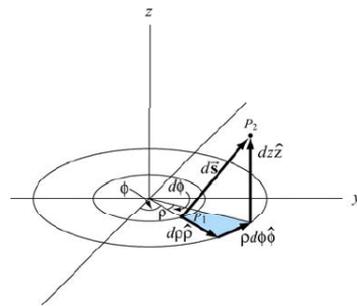


$$dV = dx dy dz$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi$$

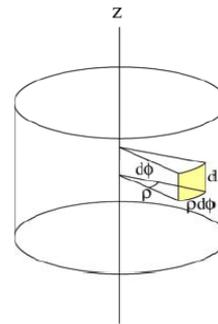


$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

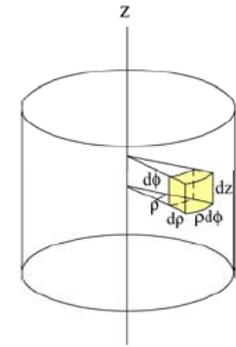


$$d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$$

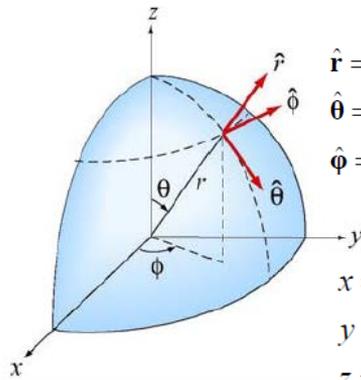
$$d\vec{A} = \rho d\phi d\rho \hat{k}$$



$$dA = \rho d\phi dz$$



$$dV = \rho d\phi d\rho dz$$



$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

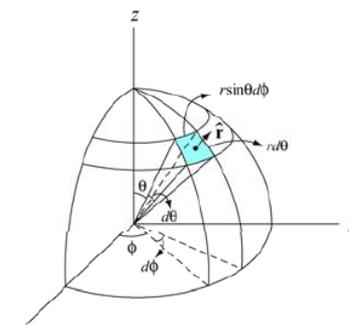
$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

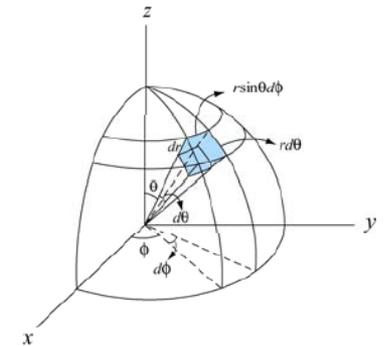
$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



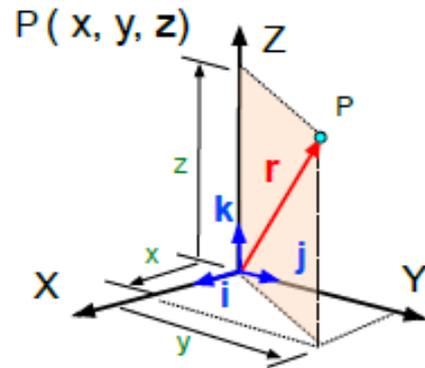
$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$



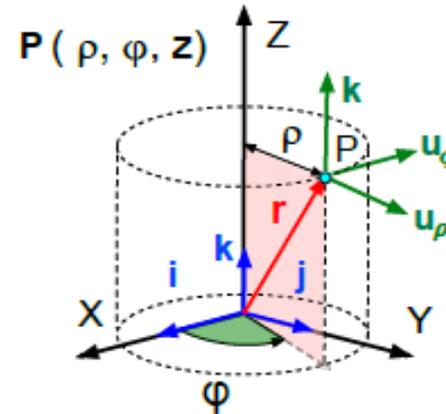
$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

Sistemas coordenados y notación: Ver Libro de Problemas

$$\mathbf{u}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$$



(a) Coordenadas cartesianas con sus vectores $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ unitarios.



(b) Coordenadas cilíndricas con los vectores $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{k})$ unitarios.

Figura 1: Esquemas del vector de posición \mathbf{r} de un punto P en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\varphi \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_\rho \quad , \quad \mathbf{u}_\rho \wedge \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{k}$$

$$\text{vector: } \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$$

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \phi, z) \leftrightarrow (r, \phi, z) \leftrightarrow (r_\perp, \phi, z)$$

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$\mathbf{e}_j, \mathbf{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j, \text{ para } j = \rho, r, \varphi, \theta, \dots$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

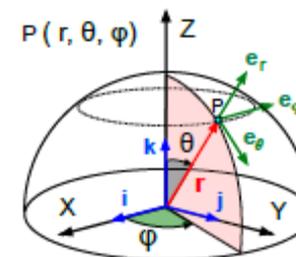


Figura 2: Coordenadas esféricas del punto P .

Operador gradiente en otros sistemas de coordenadas

- Expresión analítica del vector gradiente en **coordenadas cilíndricas** (r, φ, z)

$$\nabla T(r, \varphi, z) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad ; \quad (r, \varphi, z) \Leftrightarrow (\rho, \phi, z)$$

- En **caso** de *simetría axial*, con T dependiente sólo de la distancia al eje OZ:

$$T = T(r) \rightarrow \nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r}; \quad r \equiv r_\perp = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

- Superficies equiescalares cilíndricas, con gradiente radial respecto del eje OZ.
- Expresión analítica del vector gradiente **en coordenadas esféricas** (r, θ, φ) :

$$\nabla T(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

- Si T sólo depende de la distancia al origen (simetría esférica), las superficies equiescalares son esferas y el gradiente es radial. Dibujadlas.

$$\nabla T(r) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ pues } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} = \frac{x}{r}, \text{ etc.}$$

Divergencia y laplaciano en geometría radial cilíndrica y esférica:

Para un vector radial [o escalar p] dependiente sólo de la variable radial $r=\rho$, distancia al eje OZ, y la divergencia [laplaciano] en **coordenadas cilíndricas** es:

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{u}_r \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\left[\nabla^2 p(r) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p(r)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right]$$

Para un vector radial [o escalar p] dependiente **sólo** de la variable radial r , distancia al origen, la divergencia [laplaciano] en **coordenadas esféricas** es:

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{u}_r \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\left[\nabla^2 p(r) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p(r)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right]$$

La demostración es inmediata (hacedla). En caso de no recordar la expresión ¿cómo hacerlo?
Ejer. ¿Cómo sería la divergencia de un vector que sólo tiene en cilíndricas componente φ y ésta depende sólo de la variable radial $r=\rho$, o sea $\vec{v}(\vec{r}) = v_\varphi(r)\vec{u}_\varphi$? (sol. Poniéndolo en cartesianas, sale 0)

Problemas

• Problema 2.1

Dado el campo escalar $\phi = Ax$ con A constante, se pide:

- Representar gráficamente las superficies equipotenciales.
- Calcular el gradiente de ϕ y representarlo gráficamente.
- La derivada direccional de ϕ en las siguientes direcciones:

(1) $\mathbf{u} = \mathbf{i}$

(2) $\mathbf{u} = \mathbf{j}$

(3) $\mathbf{u} = \mathbf{k}$

(4) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

(5) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

(6) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

- Calcular $\nabla \cdot (\nabla \phi)$ y $\nabla \times (\nabla \phi)$

Solución :

(b) $\nabla \phi = A \mathbf{i}$

(c) 1) A ; 2) 0 ; 3) 0

4) $A/\sqrt{2}$; 5) $-A/\sqrt{2}$; 6) $A/\sqrt{3}$

(d) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$; $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

• Problema 2.2

Repetir el problema anterior para los campos escalares.

a) $\phi = A + Bx^2$

b) $\phi = C(x^2 + y^2)$

donde A , B y C son constantes.

Solución :

(a) $\nabla \phi = 2Bx \mathbf{i}$

(1) $2Bx$; (2) 0 ; (3) 0 ; (4) $\sqrt{2}Bx$; (5) $-\sqrt{2}Bx$; (6) $2\sqrt{3}Bx/3$

(7) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = 2B$; (8) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(b) $\nabla \phi = C(2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j})$

(1) $2Cx$; (2) $2Cy$; (3) 0 ; (4) $C\sqrt{2}(x+y)$; (5) $C\sqrt{2}(-x+y)$

(6) $\frac{2\sqrt{3}}{3}C(x+y)$ (7) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = 4C$; (8) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

• Problema 2.8

Para el campo vectorial $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ donde el escalar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de un punto del espacio al origen y $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ el vector unitario radial en coordenadas esféricas calcular:

- a) El gradiente ∇r
- b) La divergencia $\nabla \cdot \mathbf{r}$
- c) El gradiente $\nabla (1/r)$
- d) La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/r)$

Solución :

$$(a) \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r ; (b) \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 ; (c) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r ; (d) \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

Obtened, en función de n , el flujo Φ del campo \mathbf{A} a través de una *superficie esférica* de radio R centrada en el origen y particularizar para n del caso 2) ¿es nulo Φ ?

La misma cuestión para el campo \mathbf{B} , con flujo a través de un cilindro de radio R y altura H .

$$1) \nabla r = \bar{u}_r, \quad \nabla \cdot \bar{r} = 3, \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \bar{u}_r, \quad \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

$$2) n = -2$$

$$3) \nabla \rho = \bar{u}_\rho, \quad \nabla \cdot \bar{\rho} = 2, \quad \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \bar{u}_\rho, \quad \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^3}$$

$$4) n = -1$$