CÁLCULO VECTORIAL. OPERADORES I
(INTRODUCCIÓN)

Dr. José Manuel Donoso

http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Herramientas matemáticas ,derivada parcial, diferencial, gradiente

Introducción. Motivación.

En física usamos lenguaje matemático, funciones de varias variables , interesa medir variación de la función a cambiar al menos una variable.

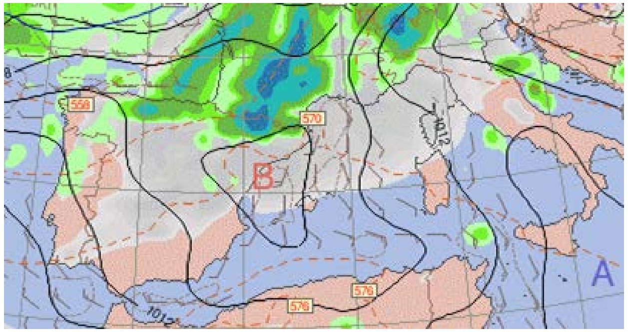
$$\mathit{Notación}\,(\mathit{espacio\,euclideo}\,3\,\mathrm{dim}):\begin{cases}\mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{cases}$$

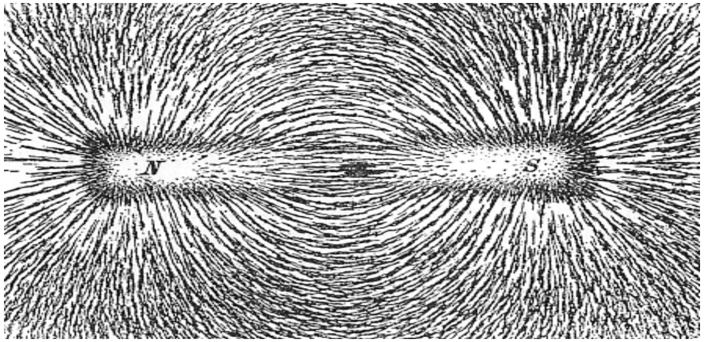
$$\mathit{En\,general}\,(x, y, z, t, s, p...)\text{variables independientes espacio Ndim}$$

- En general: propiedad mensurable escalar o vectorial dependiente del punto de medida,

$$g(\mathbf{r}) \equiv g(x, y, z)\ \begin{cases} T = T(\mathbf{r}) \quad ; \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\mathbf{r}) \quad ; \qquad \boldsymbol{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\\ \boldsymbol{w}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{i}w_x(x, y, z) + \boldsymbol{j}w_z(x, y, z) + \boldsymbol{k}w_z(x, y, z)\\ (x, y, z) \to (P, V, T)\ \text{etc.: } \mathit{son}\ \text{coordenadas ,en cualquier notación}\end{cases}$$

Visualización: campo escalar por *superficies isoescalares*, el vectorial por *líneas de campo*:





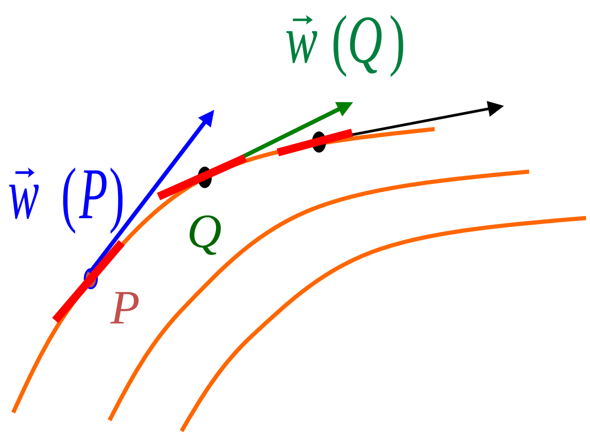
- **Campo o magnitud escalar**: cada punto del espacio le corresponde unívocamente el valor de una magnitud escalar

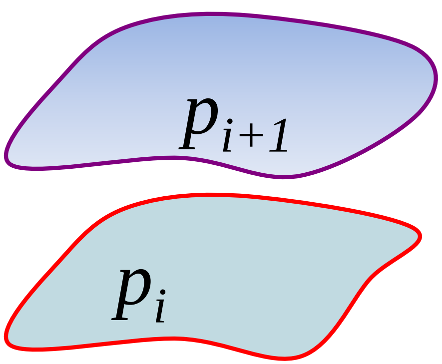
$$(x,y,z) \rightarrow U(x,y,z)$$
$$(p,V,T) \rightarrow E(p,V,T)$$

- Visualización: Superficies **equiescalares o isoescalares**: lugar geométrico del espacio en el que la propiedad U es constante . Ejemplo, superficies de presión p constante , $p=cte=p_i$, p_{i+1}

- **Campo vectorial** a cada punto le corresponde una magnitud vectorial, tres componentes escalares, p.e. Visualizarlo: líneas de campo o de fuerza.

Líneas, que **no se intersecan, tangentes** en cada punto al vector campo





Variación de un campo en el espacio: sus derivadas

• Medida de la variación de una función al variar una de sus variable: Concepto de derivada parcial, ya usado al formalizar laTermodinámica:

$$\left.\frac{d}{dy}T(x,y,z)\right|_{x,z\,ctes.} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{T(x,y+\Delta y,z)-T(x,y,z)}{\Delta y} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x,z}$$

• Usaremos la notación siguiente para indicar variación (física) de una magnitud:

$$Variación\ finita: \Delta T$$

$$Variación\ finita,\ pequeña,\ al\ límte\ error\ instrumental: \quad \delta T$$

$$Variación\ \text{infinitesimal}: \quad dT \quad (corresponde\ a\ límite\ matemático\ \Delta T \to 0)$$

• Nota: también pueden indicar valor neto de magnitudes medibles a niveles macroscópico, mesoscópico o microscópico (se indicará)

• Cuestión; ¿**Es la derivada** de un campo escalar un **escalar**? Estas combinaciones de derivadas de campos SÍ son campos escalares o vectoriales: (Tema 2).

$$grad\ P = \vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (gradiente\ de\ p)$$

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (divergencia\ de\,\vec{v})$$

$$rot\,\vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad (rotacional\ de\,\vec{v})$$

Gradiente de un escalar. Derivada direccional.

- La variación infinitesimal de la propiedad escalar *p* *(conocido como diferencial de p)* será entonces:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Ejm. *conocido* $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV \Rightarrow S = S(U,V)$ *y como* $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U dV$, *identificando* : $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T}$

- Reescrita como producto escalar, define el vector gradiente de *p*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot d\vec{l} \\ d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow dp = grad\ p \cdot d\vec{l} = \nabla p \cdot d\vec{l}}$$

- Define el **operador gradiente** que se representa por **Nabla:**

$$grad\ p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (operador\ \ Nabla)$$

- La dirección del vector desplazamiento elemental ***dl*** puede estar **orientada** sobre una curva dada. Ejm: sobre la *recta x=9y=3z*,

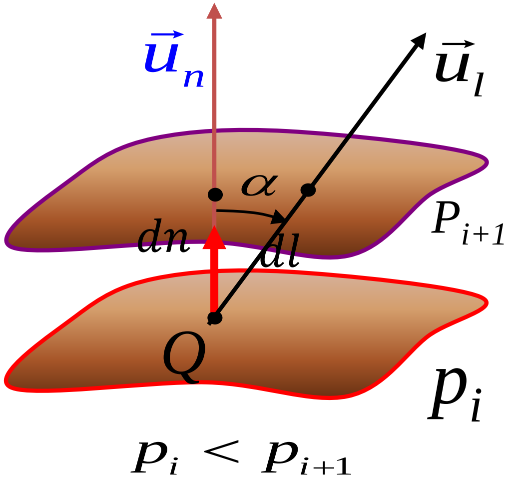
$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dx/9\,\vec{j} + dx/3\,\vec{k}$$

•La variación de *p* puede medirse a lo largo de una dirección dada.

•Si *dl* yace sobre un segmento infinitesimal de curva con orientación dada ***u.***

$$dp = grad\ p \cdot d\vec{l} = grad\ p \cdot (dl\,\vec{u}_l) = \left(\nabla p \cdot \vec{u}_l\right) dl$$

$$\frac{dp}{dl} = \nabla p \cdot \vec{u}_l = grad\ p \cdot \vec{u}_l$$



•Define la **derivada direccional** de *p e*n el punto *Q* siguiendo la orientación del versor ***u.***

•Si ***u*** yace sobre **puntos de una curva γ** , puede encontrarse tal curva que maximiza la derivada. El **módulo del gradiente da la derivada direccional máxima**: *grad P* , **se orienta hacia** donde *p* aumenta.

$$\frac{dp}{dl} = \frac{dp}{dn} \cdot \frac{dn}{dl} = \frac{dp}{dn} \cos\alpha = \frac{dp}{dn} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_l$$

$$\frac{dp}{dl} = grad\ p \cdot \vec{u}_l \Rightarrow máx\left|\frac{dp}{dl}\right| = \left|\nabla p\right|$$

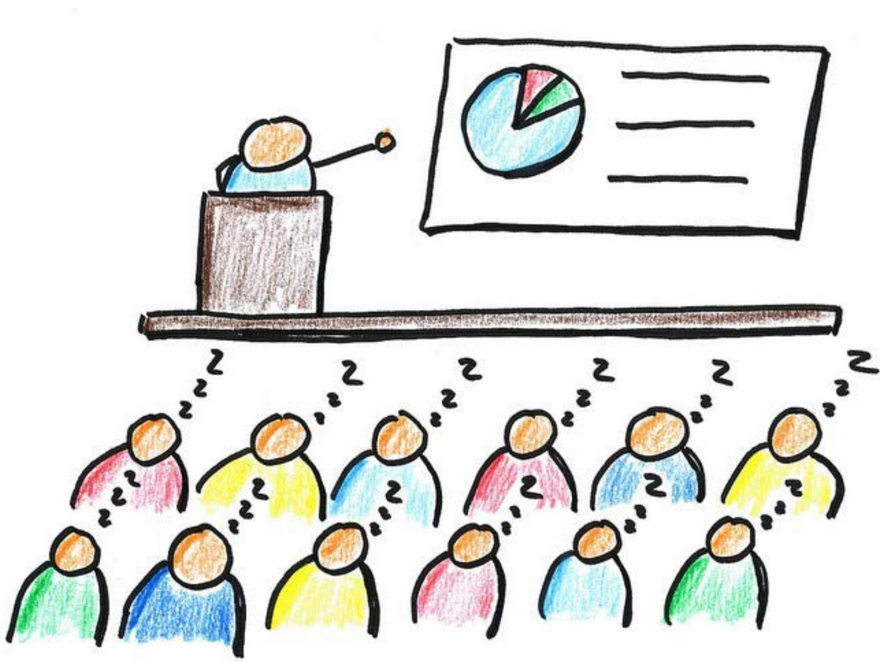
Así, si γ está sobre una superficie *p=cte.*
su derivada direccional un punto de ella es …

Los .PPTX no son apuntes (y menos aún un libro de texto ¡¡)

PROGRAMAS | CiberP@ís

¿PowerPoint nos hace estúpidos? Un libro critica el programa porque altera los hábitos de argumentación.

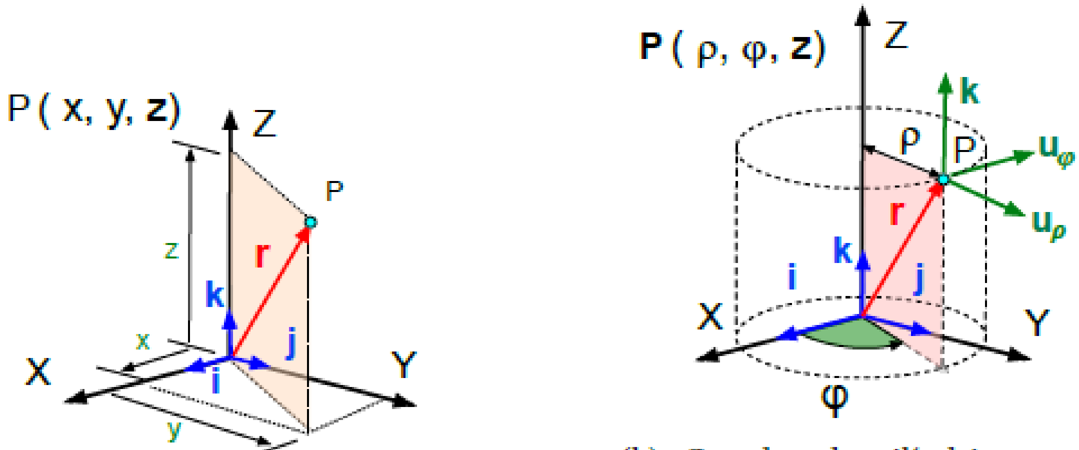
El autor, **Franck Frommer**,cree que busca hipnotizar al público y limitar su raciocinio



Nada sustituye a una buena preparación, la audiencia quiere (y debe) escuchar, el PowerPoint no es la presentación en sí.

La interiorización del mensaje es la clave, la pantalla ha de ser un complemento.

$$\mathbf{u}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$



(a) Coordenadas cartesianas con sus vectores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ unitarios.

(b) Coordenadas cilíndricas con los vectores $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{k})$ unitarios.

Figura 1: Esquemas del vector de posición $\boldsymbol{r}$ de un punto P en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

$$x = \rho\,\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x = r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi \quad , \quad y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = r\,\cos\theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2$$

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\varphi \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi\wedge\mathbf{k} = \mathbf{u}_\rho \quad , \quad \mathbf{u}_\rho\wedge\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{k}$$

vector: $\boldsymbol{v} \to \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$

$$(\rho,\varphi,z) \to (\rho,\phi,z) \leftrightarrow (r,\phi,z) \leftrightarrow (r_\perp,\phi,z)$$

$$(r,\theta,\varphi) \to (r,\theta,\phi)$$

$$\boldsymbol{e}_j \,,\, \boldsymbol{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j, \text{ para } j = \rho, r, \varphi, x, \ldots$$

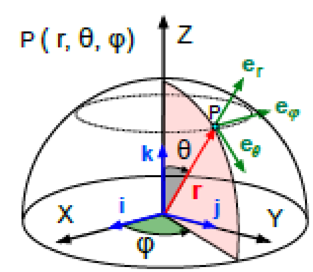
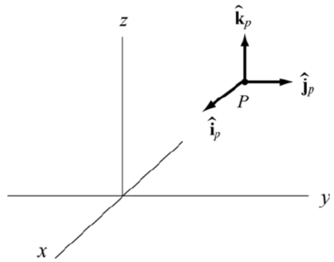
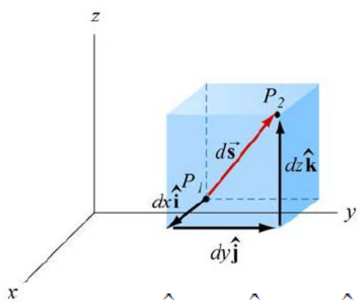


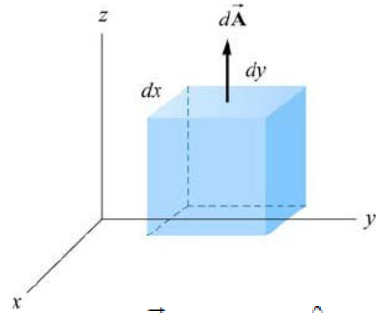
Figura 2: Coordenadas esféricas del punto P.

Repaso: Coordinates. Line, surface and volume Elements.

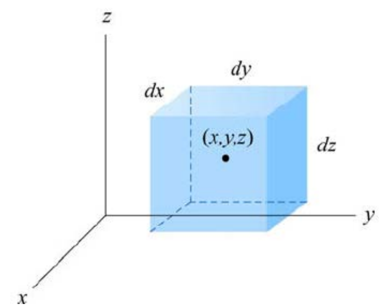




$$d\vec{\mathbf{s}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

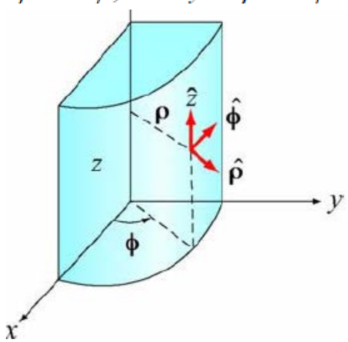


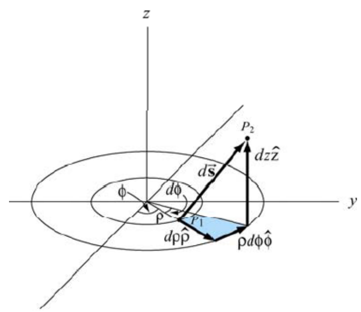
$$d\vec{\mathbf{A}} = dx\,dy\,\hat{\mathbf{k}}$$



$$dV = dx\,dy\,dz$$

$x = \rho\cos\phi,\qquad y = \rho\sin\phi$

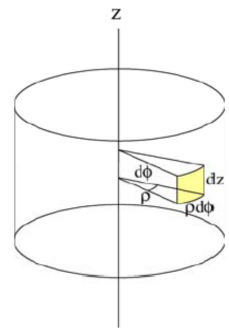




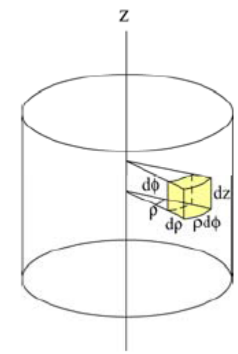
$$d\vec{\mathbf{s}} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{j}},\qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$

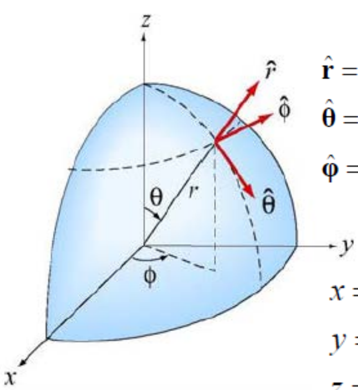
$$d\vec{\mathbf{A}} = \rho\,d\phi\,d\rho\,\hat{\mathbf{k}}$$



$$dA = \rho\,d\phi\,dz$$



$$dV = \rho\,d\phi\,d\rho\,dz$$



$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

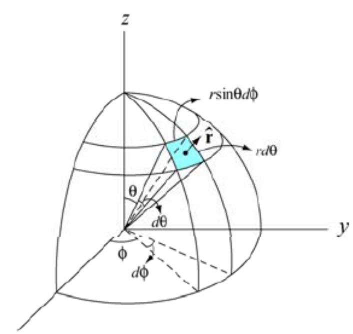
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

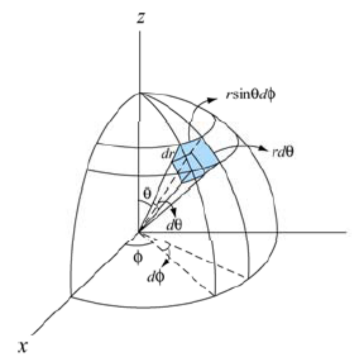
$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$



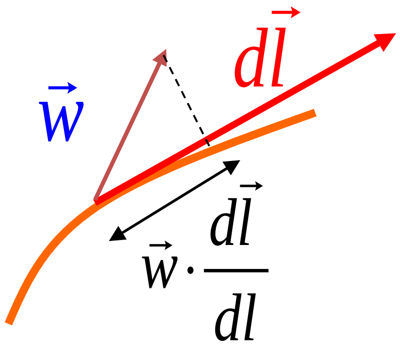
$$d\vec{\mathbf{A}} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{\mathbf{r}}$$



$$dV = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$$

Integral de línea y Circulación de un vector sobre una curva

•Entre dos puntos A y B de una curva simple Γ. Se define la **integral de línea** del vector a lo largo de la curva entre los puntos dados como: (pondera proyección del vector sobre la curva en promedio)



$$Si\ \vec{w}\ uniforme:\ C = \vec{w}\cdot\Delta\vec{l} = |\vec{w}||\Delta\vec{l}|\cos\alpha$$

$$En\ general\ C = \sum_{i=1}^{N}\vec{w}(P_i)\cdot\Delta\vec{l_i} \rightarrow C = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta l\to 0}} C_i = \int_{A,\Gamma}^{B}\vec{w}\cdot\vec{d}l$$

$$\boxed{C_{A,B} = \int_{A(\Gamma)}^{B}\vec{w}\cdot d\vec{l} = -\int_{B(\Gamma)}^{A}\vec{w}\cdot d\vec{l}}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \rightarrow d\,\vec{l}_{1,2} = -d\,\vec{l}_{2,1}$$

$$C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1}\vec{w}\cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2}\vec{w}\cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma}\vec{w}\cdot d\vec{l} = C_{\Gamma}$$

•La **integral de línea** en una curva es la suma de las integrales de línea sobre segmentos de curva. Interesa el caso de **circulación de un vector** a lo largo de curva Γ cerrada simple

$$C = \oint\vec{w}\cdot d\vec{l}$$

$$Ejm.\ Trabajo\ W = \int_{A,\gamma}^{b}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Ejm. Problemas: 2.6, 2.7