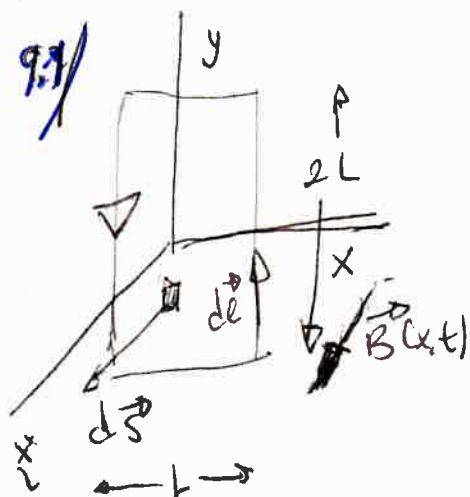


Prob e



$$d\vec{S} = dx dy \vec{k}$$

La espira está formada por hilos de sección A y conductividad σ_c por lo que la resistencia eléctrica total será

$$R = \oint \frac{dl}{\sigma_c A} = \int \frac{dl}{A \sigma_c} = \frac{L + 2L + L + 2L}{A \sigma_c} = \frac{6L}{\sigma_c A} \quad (\Omega)$$

Dado que el campo magnético varía con el tiempo el flujo de este campo a través de la superficie de la espira, ϕ , también varía con t :

$$\begin{aligned} \phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{x=-L/2}^{L/2} B(x,t) dx \int_{y=-L}^L dy \\ &= 2L \int_{-L/2}^{L/2} B(x,t) dx \end{aligned}$$

y la fem \mathcal{E} (fuerza electromotriz) inducida será (Farada)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}$$

casos:

1) $\vec{B} = \kappa t^n \vec{k}$, luego
 $= \vec{B}(t)$
 Uniforme en \vec{k}

$$\phi = 2L^2 \kappa t^n$$

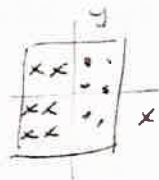
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = IR \Rightarrow I = - \frac{\kappa n t^{n-1} 2L^2}{R}$$

inducida circulando en sentido $-\vec{d\vec{e}}$ de la figura.

2) si: $B = kxt$ ②

$$\phi = 2L \int_{-L/2}^{L/2} kxt dx = 0; \mathcal{E} = 0$$

El flujo neto es nulo



\vec{B} cambia de sentido, simétrico.

3) $B = k|x|t$

entonces

$$\begin{aligned} \phi &= 2L \int_{-L/2}^{L/2} |x| dx kt = 4kL \left[\int_{-L/2}^0 -x dx + \int_0^{L/2} x dx \right] \\ &= kt L^3/2 \end{aligned}$$

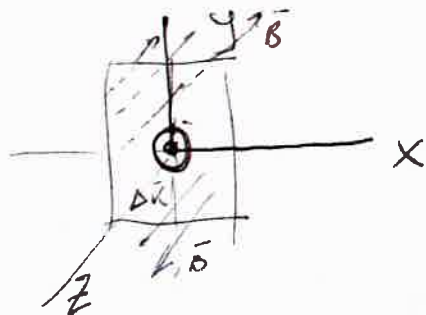
y

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = IR = -k \frac{L^3}{2}$$

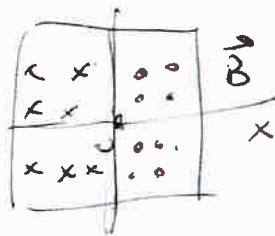
muevamente en sentido $(-\vec{d\ell})$, sentido reloj.

Prob

9.3 AMORA: La espira se mueve respecto a un campo B que no varía con t , pero sí con x , por lo que puede haber variación temporal de flujo magnético a través de la superficie de la espira

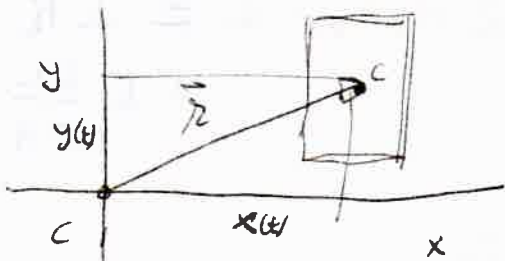


$$\vec{B} = B_0 \frac{x}{L} \vec{k}$$



Prob 9.2 (generalitads al final)

9.2.5 En los tres casos, la velocidad ⁽³⁾ es constante, luego el centro geométrico de la espira se desplazará en Movimi. Recti. Unif. tomando en $t=0$ la posición



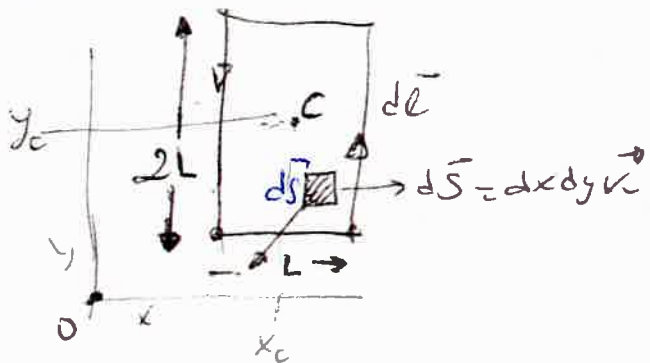
$$\vec{r}_c = 0 + \vec{v}_0 t$$

$$\int x_c = v_{0x} t$$

$$\int y_c = v_{0y} t$$

donde en 1) $v_{0x} = v_0, v_{0y} = 0$, en 2) $v_{0x} = 0, v_{0y} = v_0$
 y en 3) $v_{0x} = v_{0y} = v_0/\sqrt{2}$

El flujo magnético, con el diferencial de superficie anterior



Elemento de flujo:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dx dy$$



donde x varía entre $x_c - L/2$ y $x_c + L/2$ e y varía entre $y_c - L$ e $y_c + L$, luego

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = IR \quad ; \quad \phi = \int_{y_c-L}^{y_c+L} dy \int_{x_c-L/2}^{x_c+L/2} \frac{B_0}{L} x dx$$

dando

$$\phi = 2L \frac{B_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_c-L/2}^{x_c+L/2} = \frac{B_0}{L} \left((x_c + \frac{L}{2})^2 - (x_c - \frac{L}{2})^2 \right) = 2B_0 L x_c(t)$$

que sólo depende de la posición x_c del centro (pues B no varía con y).

Observar que I es de signo $(-)$ \rightarrow la corriente circular en sentido opuesto al $d\vec{e}$ del gráfico anterior, como podría intuirse viendo que ϕ aumenta.
 La fem inducida será ④

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \alpha \left[x_c + \frac{L}{2} - (x_c - \frac{L}{2}) \right] \dot{x}_c \\ &= +2B_0 L \frac{dx_c}{dt} = -2B_0 v_{ox} L = IR = \\ &= I \frac{6L}{\sigma_c A} \end{aligned}$$

Entonces:

$$1) \quad v_{ox} = v_0 \quad \mathcal{E}_1 = 2B_0 v_0 = I_1 R$$

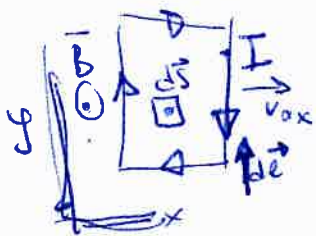
$$|I_1| = +1 \frac{2B_0 v_0}{6L} \sigma_c A = \frac{1}{3} \frac{B_0 v_0 \sigma_c A}{L} = \frac{B_0 v_0 \sigma_c A}{3}$$

en sentido de $-d\vec{e}$ (horario)

$$2) \quad v_{ox} = 0 \quad \text{luego} \quad \mathcal{E}_2 = 0, \quad I_2 = 0$$

$$3) \quad v_{ox} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad \text{entonces}$$

$$\mathcal{E}_3 = 2B_0 L \frac{v_0}{\sqrt{2}} = I_3 R$$



$$|I_3| = |I_1|/\sqrt{2}$$

en sentido horario.
 también

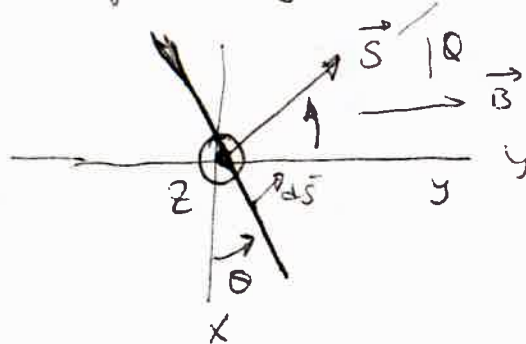
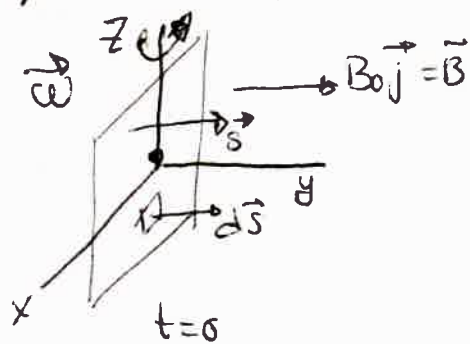
Sugerencia: Repetir el problema suponiendo que el campo es $\vec{B} = \frac{B_0}{R} \frac{y}{T} \vec{y} \times \vec{k}$

donde B_0 y T son constantes (en Teslas y seg.)

$$\text{Sol. ahora} \quad \phi = \int_{y_c-L}^{y_c+L} y dy \int_{x_c-L/2}^{x_c+L/2} x dx \left(\frac{B_0 T}{L^2 T} \right) \rightarrow \text{continúa}$$

Prob.

9.3 / Ahora la espira rota en el seno de un campo \vec{B} cte. por lo que la superficie que ofrece al campo varía con el tiempo, y por tanto el flujo magnético también.



$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ ángulo: con $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t$

La resistencia de la espira es

$\left(\rho_c = \frac{1}{\sigma_c} \right)$ $R = \int_{L_{total}} \frac{dl}{A \sigma_c} = \int \rho_c \frac{dl}{A} = \frac{4L \rho_c}{A} = \frac{4L}{\sigma_c A}$

resistencia inversa a conductividad

El flujo es

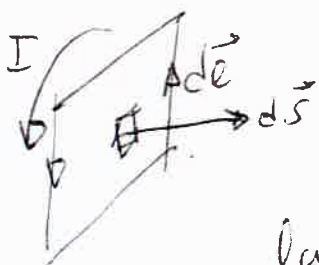
$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S=L^2} B_0 \hat{j} \cdot [dS \hat{u}_z]$$

$$= \int B_0 dS \cos \theta = B_0 L^2 \cos \theta$$

Entonces, por Faraday - Lenz, la fem es:

$$IR = \mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = -(-B_0 L^2 \sin \theta) \dot{\theta} = B_0 L^2 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

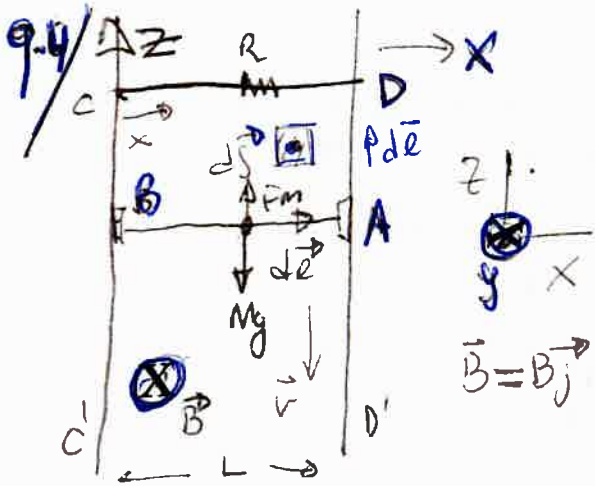
luego la intensidad $I = \frac{B_0 L^2 \omega_0 \sin(\omega_0 t) A}{4L \rho_c} = \frac{B_0 L \omega_0 A \sigma_c \sin(\omega_0 t)}{4}$



en sentido de $d\vec{l}$ (o bien opuesto a él) acorde con $d\vec{S}$ tomado, ~~para~~ varia con t, según signo de $\sin(\omega_0 t)$

la I es oscilante ent. \rightarrow corriente alterna
la carga oscila en el conductor.

Prob.



La barra BA comienza a caer, la superficie de la espira que cierra BADC varía en el seno de \vec{B} , aparece por tanto flujo magnético variable y corriente inducida (sentido que tienda a contrarrestar el aumento de flujo).

La fuerza sobre la varilla debida a la acción de \vec{B} es:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{e} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_m = \int_0^L I dx \vec{i} \times B \vec{j} = ILB \vec{k}$$

(I sobre varillas / aquí sobre BA) en el $d\vec{e}$ marcado.

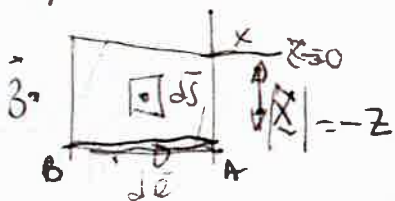
1) La carga negativa de la barra se mueve según

$$3) \vec{F}_{mg} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q(|\vec{v}|(-\vec{i}) \times B \vec{j}) = q|\vec{v}|B \vec{i} = -|q||\vec{v}|B \vec{i} \Rightarrow$$

se mueve según $-\vec{i}$, o sea de A a B

2) El sentido de la corriente será de B a A y por tanto en la espira sería BADC, según sentido $d\vec{e}$ (dado $d\vec{s}$)

$$3) \text{ de } \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = IR, \quad \phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS = BL|z| = BL(-z)$$



luego

$$IR = BL \frac{dz}{dt} = \underline{BLV}$$

Y como la ecuación del movimiento es

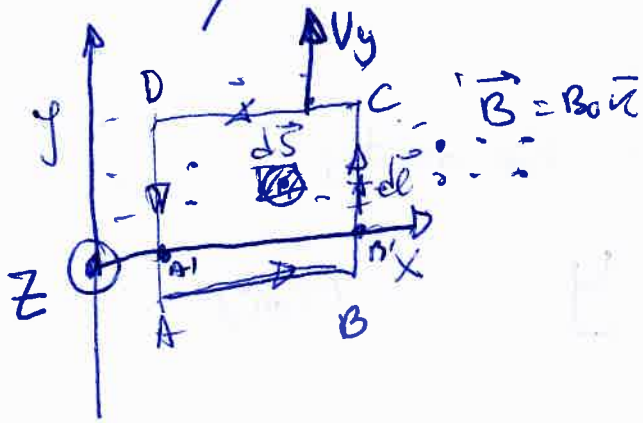
$$ILB - Mg = m \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \underline{V_f}$$

o sea: $M a_z = \frac{BLV}{R} - Mg = M \frac{dv}{dt} = 0$ (movim. uniforme al final)

la Velocidad límite $V_{\infty} = V_f = \frac{MgR}{B^2 L^2}$

Prob 9.5)

Una espira penetra en una región, y z_0 donde hay un campo magnético \vec{B} de inducción



$$\vec{B} = B_0 \hat{i}$$

y por ella circulará una corriente de intensidad I que se considerará positiva si se recorre (circula) en el sentido

indicado (ABCD) o contra-reloj pues elegimos un elemento de superficie $d\vec{S} = dS \hat{n}$ perpendicular a la espira y $d\vec{S}$ y $d\vec{\ell}$ forman un triángulo a derechas (convención). Si I sale negativa, su sentido de giro es opuesto (reloj)

En un instante genérico dado $t > 0$ la espira ha penetrado en la región con campo \vec{B} operando a esta superficie $AB'CD$ y con velocidad $v_y = v_y(t)$. La fuerza sobre la espira será:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \times \vec{B} = \int_{B'}^C I dy \hat{j} \times B_0 \hat{i} + \int_C^D I dx \hat{i} \times B_0 \hat{i} + \int_D^A I dy \hat{j} \times B_0 \hat{i}$$

pero en los tramos con $d\vec{\ell}$ en el eje \vec{oy} se tiene:

$$\int_{B'}^C I B_0 dy \hat{i} + \int_D^A I B_0 dy \hat{i} = \hat{i} \int_{B'}^C I B_0 dy + \hat{i} \int_D^A I B_0 dy = 0$$

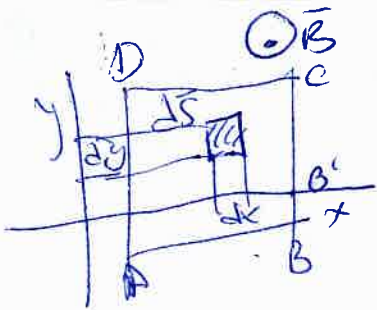
(Inertias iguales en valor y sentido opuestos)

luego

$$\vec{F} = \int_C^D I B_0 dx (-\hat{j}) = -\hat{j} \int_{x_0}^{x_0-L} I B_0 dx = \hat{j} I L B_0$$

Hay que evaluar $I = I(t)$ por la ley de Faraday

$$E = IR = -\frac{d\Phi}{dt}$$



con $d\vec{S} = dx dy \vec{k}$

el flujo magnético es:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 dx dy$$

que da:

$$\phi = B_0 \int_A^B dx \int_{B'}^C dy = B_0 L y \quad (\text{Tm}^2)$$

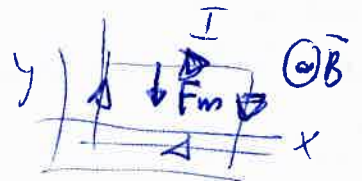
luego, se la fem inducida:

↙ velocidad en oy

$$IR = - \frac{d\phi}{dt} = - B_0 L \frac{dy}{dt} = - B_0 L v_y$$

y finalmente:

$$I = - \frac{B_0 L}{R} v_y$$



que circula en sentido $D \rightarrow C$ pues I se crea para contrarrestar el aumento de flujo debido a \vec{B} y al aumento de la superficie S al ser $v_y > 0$.

Hay que evaluar v_y en función de t .
Como la fuerza es tal que

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\vec{j} |I| B_0 L = m a_y \vec{j}$$

de la expresión de \vec{F} anterior ($|I|$ es I positiva de supuesto anterior) se tiene:

$$- \frac{B_0 L}{R} v_y B_0 L = m \frac{dv_y}{dt}$$

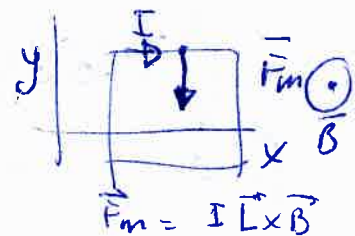
o sea:

$$\frac{dv_y}{dt} = - \frac{B_0^2 L^2}{mR} v_y = - \frac{v_y}{\tau_0}$$

donde se ha hecho

$$\tau_0 = \frac{mR}{B_0^2 L^2} \quad (\text{unidades de tiempo})$$

y separando variables:



$$\frac{dv_y}{v_y} = - \frac{dt}{\tau_0}$$

Integrando:

$$\int_{v_0}^{v_y} \frac{dv_y}{v_y} = - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln \frac{v_y}{v_0} = - \frac{t}{\tau_0} \Rightarrow v_y = v_0 e^{-t/\tau_0}$$

que da una velocidad que decrece (frenado) exponencialmente.

Finalmente, la intensidad de corriente es

$$|I(t)| = \frac{B_0 L v_0}{R} e^{-t/\tau_0} \quad \left(\begin{array}{l} \vec{I} \rightarrow 0 \\ \text{si } t \rightarrow \infty \end{array} \right)$$

C/da espira irá perdiendo su energía cinética inicial y que se transformará en energía perdida por efecto Joule en la resistencia R. En efecto, se

$$\frac{dW}{dt} = P = \frac{dE_c}{dt} = m v_y a_y = F v_y$$

$$= (-I L B_0 v_y) = B_0 L \frac{B_0 L v_y^2}{R} = \frac{B_0^2 L^2 v_y^2}{R} \text{ (Wattios)}$$

y la potencia disipada por efecto Joule es

$$P_d = I^2 R = \left(\frac{B_0 L}{R} v_y \right)^2 R = P \text{ (iguales)}$$

C/da distancia recorrida hasta pararse (en tiempo infinito) es finita:

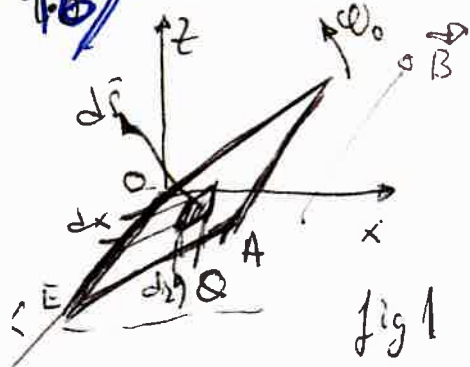
$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 e^{-t/\tau_0} \Rightarrow \int_0^{D_{0y}} dy = v_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau_0} dt$$

$$D_{0y} = v_0 \tau_0 = v_0 \frac{m R}{B_0^2 L} \text{ (metros)}$$

supuesto $D_{0y} \ll L$ (no entra espira por completo) $\Rightarrow v_0 \ll \frac{B_0^2 L^2}{m R}$

Prob.

9.6)



La espira rota por el eje OE por acción de un momento externo con velocidad angular constante

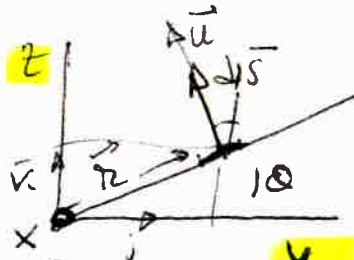


fig 2

$$\vec{u}_z = \cos\theta \vec{j} + \sin\theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_z}{d\theta}$$

$$\vec{\omega} = \omega_0 \vec{i}$$

$$\vec{B} = \frac{B_0}{L} (z\vec{j} + y\vec{k})$$

El elemento de superficie $d\vec{S}$ tiene valor

$$dS = dx dr \quad (\text{fig. 1})$$

y sentido de $\vec{u} = \vec{u}_\theta =$

$$\vec{n} = \vec{u} = -\sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

luego dado el elemento de flujo magnético es

$$d\vec{S} = dx dr (-\sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \quad \text{con el } \vec{B}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{B_0}{L} (-z \sin\theta + y \cos\theta)$$

pero $z = r \sin\theta$ e $y = r \cos\theta$, luego:

$$\phi = \int_{x=0}^L \int_{r=0}^L (-r \sin^2\theta + r \cos^2\theta) \frac{B_0}{L} dx dr$$

$$= \frac{B_0 L^2}{2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{B_0 L^2}{2} \cos 2\theta \quad (a)$$

la fem es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0 L^2}{2} (2 \sin 2\theta) \dot{\theta} = \frac{B_0 L^2 \omega_0 \sin 2\theta}{2}$$

como el material tiene de resistencia R_e ($\Omega/m/cm$) la resistencia es

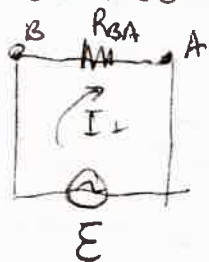
$$R = 4L R_e$$

y por tanto

$$a) \quad I = \frac{B_0 L^2 \omega_0 \sin 2\theta}{4R L}; \quad I_{\max} = \frac{B_0 L \omega_0}{4R_e} \cdot 1$$

cuando $2\theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$ (en $t = \omega_0 t$)

b) La diferencia de potencial entre A y B cuando $I = I_{\max}$ ($\varphi = \pi/4$) (2)



con (Circuito)

$$\underline{\mathcal{E} - IR = V_B - V_A}$$

en $\varphi = \pi/4$:

$$B_0 L^2 \omega_0 \sin \frac{\pi}{2} - R_{BA} \left(\frac{B_0 L \omega_0}{4 R_e} \right) = V_B - V_A$$

con R_{BA} como resistencia del tramo BA y longitud L $\&$ $R_{BA} = L R_e$ se tiene

$$V_B - V_A = \omega_0 L^2 B_0 \frac{3}{4}$$

c) La potencia disipada por efecto Joule en todo el circuito de resistencia R es: (ver tema de Conducción)

$$P = I^2 R = \frac{dW}{dt} \quad (\text{vatios})$$

luego en un tiempo dt la energía disipada dW es

y por tanto $dW = dE = I^2 R dt = I^2 R \frac{dt}{d\varphi} d\varphi$ (cambio variable)

$$U = E = \int_0^{2\pi} (I^2 R \frac{dt}{d\varphi}) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{B_0 L \sin 2\varphi \omega_0}{4 R_e} \right)^2 (L R_e) \frac{L}{\omega_0} d\varphi$$

$$= \pi \frac{B_0^2 L^2 \omega_0}{4 R_e} \quad (\text{Julios})$$

~~PARA OTRO campo~~

Ahora $\vec{B} = B_0 \sin \omega t (z\vec{j} + y\vec{i})$ sólo difiere en que B_0 para a $B_0 \sin \omega t$ por lo que el flujo magnético, de (a), es

$$\phi^* = \frac{B_0 L^2}{2} \sin \omega t \cos 2\varphi$$

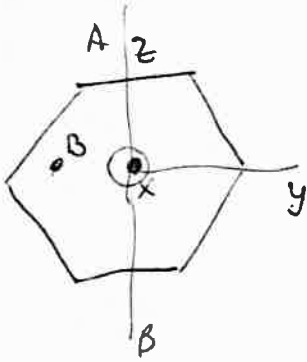
y su cambio con t da:

$$IR = \mathcal{E}^* = - \frac{d\phi^*}{dt} = \frac{B_0 L^2}{2} \omega \cos \omega t \cos 2\varphi - \sin \omega t (2\omega \sin 2\varphi)$$

lo que da I .

Extra

9.5/
bis



$$\vec{B} = B\vec{i}$$

(No entra este problema en 2020 pero es similar a 9.4)

Ahora la espira de resistencia R gira con aceleración angular α luego, hasta dar dos vueltas (4π rad)

$$\text{de } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

y si $\theta > 4\pi$ la velocidad angular en este t :

$$\omega = \dot{\theta} = \alpha t \rightarrow \dot{\theta} = \omega = \alpha t_{4\pi} \text{ si } \theta > 4\pi$$

con

$$t_{4\pi} \Rightarrow 4\pi = \frac{1}{2} \alpha t_{4\pi}^2 \Rightarrow t_{4\pi} = \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}}$$

$$\text{y } \omega = \sqrt{8\pi\alpha} \text{ si } t \geq \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}}$$

El flujo magnético:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos\theta$$

$$\text{y } \mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = IR = \dot{\theta} BS \sin\theta = \omega BS \sin\theta$$

luego

$$I = \frac{\omega BS \sin\theta}{R}$$

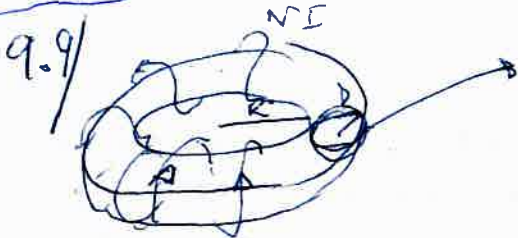
con:

$$\omega = \begin{cases} \alpha t & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} \\ \sqrt{8\pi\alpha} & \text{si } t \geq \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} \end{cases}$$

(movimiento circular unif. acelerado hasta $t_{4\pi}$ y uniforme desde $t_{4\pi}$)

$$\text{y } \theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha t^2, & 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} \\ 4\pi + \sqrt{8\pi\alpha} \left(t - \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} \right) & t \geq \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}} \end{cases}$$

Extra



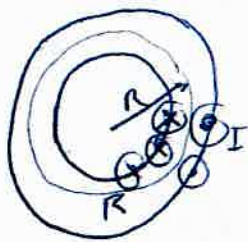
Toroide de sección circular de radio toroidal R y radio central (de la espiral) $R \ll R$.

Pide el coeficiente de auto-inducción

$L = \phi/I$ donde ϕ es el flujo del campo \vec{B} a través de una sección transversal del toroide.

El campo \vec{B} interior puede obtenerse de la ley de Ampere (para \vec{H} ó \vec{B})

$$\oint_R \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Gamma_R, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \begin{matrix} \text{si es} \\ \text{medio lineal} \end{matrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = H \vec{u}_\phi \\ d\vec{l} = dl \vec{u}_\phi \end{array} \right. \quad \text{por simetría (ver tema 8)}$$

$$H \cdot 2\pi R = NI; \quad B = \mu \frac{NI}{2\pi R}$$

y por tanto, el flujo de B es, con $d\vec{s} = ds \vec{u}_\phi$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (B \vec{u}_\phi) \cdot (ds \vec{u}_\phi) = \int B ds = \int \frac{\mu NI}{2\pi R} \pi r^2 = \frac{\mu NI}{2\pi R} \pi R^2 \quad (\text{para una espiral})$$

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{N \phi}{I} = \frac{\mu N^2 R^2}{2R} \quad \begin{array}{l} \mu = \mu_0 \text{ (vacío)} \\ \mu = \mu_0 \mu_r \text{ (medio)} \end{array}$$

2) La energía magnética del dispositivo.

$$\frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv = U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 R^2 I^2 / R \quad \text{en (vacío)}$$

si tiene un medio material magnético, de la expresión general:

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv = \frac{1}{2} \int \left(\frac{NI}{2\pi R} \right)^2 dv = \frac{\mu}{2} \left(\frac{NI}{2\pi R} \right)^2 (2\pi R \pi R^2)$$

y la diferencia pedida es

$$\Delta U_m = U_m(\mu) - U_m(\mu_0) = (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 R^2}{4R} > 0 \quad \text{si } \mu_r > 1 \quad (\mu = \mu_0 \mu_r)$$