

Prob. 11



Al girar la espira, que tiene carga de densidad

(1)

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

produce una corriente de intensidad I .

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{2\pi} \omega \quad (A) \quad \left(\frac{Q}{2\pi} = \frac{dq}{d\theta} \rightarrow \text{uniforme} \right)$$

1) El momento magnético es (I por área)

$$\vec{m} = I \vec{S} = I \pi R^2 \vec{k} = \frac{Q \omega \pi R^2}{2} \vec{k} \quad (Am^2)$$

2) El momento que produce \vec{B} uniforme, y la fuerza magnética sobre la espira (ver teoría) son:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = I d\theta \vec{u}_\theta \times \vec{B} = I d\theta (\cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{i}) \times \vec{B}_0$$

luego, como $\int_0^{2\pi} (\cos\theta, \sin\theta) d\theta = (0, 0)$

$$\vec{F} = 0 \quad \text{en ambos casos.}$$

y de

$$\vec{\tau}_0 = \vec{M}_r = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{B}_0 = B_0 \vec{k} \\ \frac{Q\omega R^2}{2} (B_x \vec{j} - B_y \vec{i}) & \text{en el otro caso.} \end{cases}$$

8.2/ Dan aquí el valor del 2 dipolo (momento dipolar magnético, se dice) \vec{m} conocido y orientado como se indica. \vec{m} crea un campo de potencial vector magnético

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\vec{r}_c = 0)$$

que da el campo dipolar

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{m\vec{k}}{r^3} \right\}$$

que, sobre el plano $z=0$ resulta ser:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\vec{k}}{r_\perp^3}, \quad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$$

cuyo flujo a través de la espira, con el elemento de superficie



$$d\vec{S} = r_\perp dr_\perp d\theta \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_{r=R_1}^{R_2} B_{\perp} dr_{\perp} d\theta \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{r_{\perp} dr_{\perp} \alpha}{r_{\perp}^3} = \frac{\mu_0 m \alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (\text{Tm}^2)
 \end{aligned}$$

Nota:

También, al ser la espira cerrada (R cerrada simple) se tendría

$$\Phi_m = \int_{S_R} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_R} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_R \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

coincide con la circulación de \vec{A} a lo largo de la espira, con

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\vec{u}_{\theta}}{r_{\perp}^2} \quad \text{y} \quad d\vec{\ell} = r_{\perp} d\theta \vec{u}_{\theta} \quad (\text{en curvas})$$

se tiene: $z=0$ $\vec{u}_{\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 A dl + \int_3^4 A dl \equiv \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{R_1 d\theta}{R_1^2} - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{R_2 d\theta}{R_2^2} \right] = \Phi_m$$

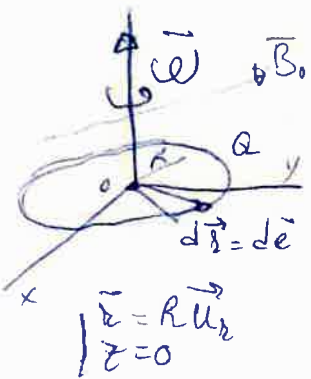
pues en los tramos rectos (radiales) $\vec{A} \perp \vec{u}_{\perp} \rightarrow \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$

b) la fuerza sobre el tramo viene de

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_a &= \int_{c_1} \vec{I} d\vec{\ell} \times \vec{B}(r') = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} I R_1 d\theta' \frac{\mu_0 m}{4\pi R_1^3} \vec{u}_{\perp}(\theta') \\
 &= \frac{\mu_0 I m}{4\pi R_1^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\cos\theta' \vec{i} + \sin\theta' \vec{j}) d\theta' = \frac{\mu_0 I m}{2\pi R_1^2} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \vec{i} \quad (N)
 \end{aligned}$$

Problema 8.1 / versión extendida.

①



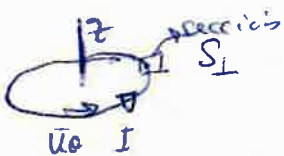
El anillo tiene carga Q uniformemente distribuida, por tanto la relación carga/longitud es uniforme

$$\frac{dq}{dl} = \frac{Q}{2\pi R}, \text{ con } dl = R d\theta$$

equivale a decir que:

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{Q}{2\pi}$$

Al girar desplaza carga tangencialmente al hilo, y por tanto se produce una corriente efectiva de intensidad I , con $\omega = d\theta/dt$ (velocidad angular)



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{2\pi} \omega$$

y la densidad de corriente \vec{J} que fluye por una sección S_{\perp} (m^2) del hilo será, en sentido tangencial:

$$\vec{J} = \frac{I}{S_{\perp}} \vec{e}_{\theta} = \frac{Q\omega}{2\pi S_{\perp}} \vec{u}_{\theta} \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)$$

1/ El momento magnético de la espira es:

$$\vec{m} = I \vec{S} = \frac{Q\omega}{2\pi} \pi R^2 \vec{u}_z = \frac{Q\omega R^2}{2} \vec{u}_z \quad (Am^2)$$

2/ La fuerza sobre un arco de espira, subtendido entre θ_1 y θ_2 sería tal que, de

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B} \quad (\text{Lorentz})$$

ce tiene
$$= I R d\theta \vec{u}_{\theta} \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

(para \vec{B} uniforme cualquiera):

$$\vec{F} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I R d\theta (-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \times \vec{B}_0$$

$$= \left[I R (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \times \vec{B}_0 \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = I R [\vec{u}_z(\theta_2) - \vec{u}_z(\theta_1)] \times \vec{B}_0$$

y, en particular, $\vec{F} = 0$ para $\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi$.

3- Para el momento (torque) de la fuerza sobre la espira, de

8.1(2)

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times (\vec{I} d\vec{s} \times \vec{B})$$

con la propiedad $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ queda

$$d\vec{\tau} = I \left((\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{s} - (\vec{r} \cdot d\vec{s}) \vec{B} \right)$$

con $\vec{r} = R \vec{u}_\rho(\theta)$ y $d\vec{s} = R d\theta \vec{u}_\theta$,
teniendo en cuenta que $\vec{r} \cdot d\vec{s} = d(\frac{R^2}{2})$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= I \oint \vec{r} \times (d\vec{s} \times \vec{B}_0) = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) d\vec{s} - I \vec{B}_0 \oint \frac{d(R^2)}{2} \\ &= I \oint (R \cos\theta \vec{i} + R \sin\theta \vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) R (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) d\theta \\ &\quad - I \vec{B}_0 \left(\frac{R^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$= I R^2 (-\pi B_y \vec{i} + \pi B_x \vec{j})$$

$$= \frac{Q\omega}{2} R^2 (B_x \vec{j} - B_y \vec{i}),$$

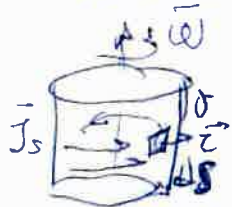
independiente de B_z .

Da el mismo resultado que al aplicar:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{I\omega}{2} R^2 \vec{k} \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

como dije en clase de teoría.

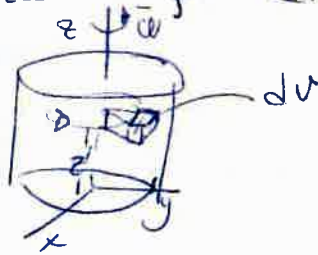
Nota. Si se tiene una lámina cilíndrica de carga σ (C/m²), radio R y altura L girando a velocidad ω , se generaría una corriente superficial



$$\vec{J}_s = \frac{d\vec{I}}{dS} = \frac{\sigma dS \omega R}{dS} \vec{\tau} = \sigma \omega R \vec{u}_\theta \left(\frac{A}{m} \right)$$

y crearía un campo \vec{B} similar al del solenoide finito de n vueltas $\vec{J}_s = I n$ con $n = N/L$.

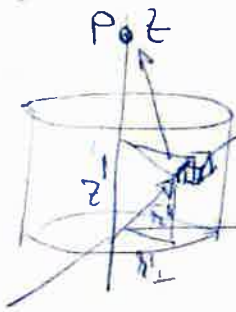
Otro caso interesante es el de la densidad de corriente generada al hacer girar un cilindro de longitud L que está cargado con densidad volumétrica de carga ρ (C/m^3):



Se tendría:

$$\vec{J} = \frac{\sum q_j \vec{v}_j}{\Delta V} = \frac{dq \vec{v}}{dV} = \frac{\rho dV (\omega r) \vec{u}_\theta}{dV} = \rho \omega r \vec{u}_\theta$$

dependiente de $r = r_\perp$ y en sentido \vec{u}_θ . El campo en P:



$$dv' = r' dr' dz' d\theta'$$

$$\begin{cases} \vec{r} = z \vec{k} \\ \vec{r}' = r' \vec{u}_2(\theta') + z' \vec{k} \end{cases}$$

Se tendría integrando:

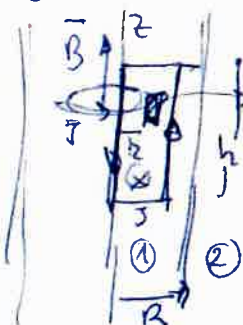
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') dv' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \omega r' \vec{u}_\theta(\theta') \times \frac{(z - z') \vec{k} + r' \vec{u}_2(\theta')}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}}$$

con $\vec{u}_\theta(\theta') \times \vec{k} = +\vec{u}_2(\theta') = +(\cos\theta' \vec{i} + \sin\theta' \vec{j})$

con $\vec{u}_\theta(\theta') \times \vec{u}_2(\theta') = -\vec{k}$

con $\int dz'$, $\int d\theta'$ y la $\int dr'$, conviene hacer la integral angular primero, quedando sólo la componente en \vec{k} para \vec{B} en eje oz .

NOTA: Si el cilindro es infinito puede hacerse por la ley de Ampere, con $\vec{B} \cong B(r) \vec{k}$ e I la corriente sobre S tal que



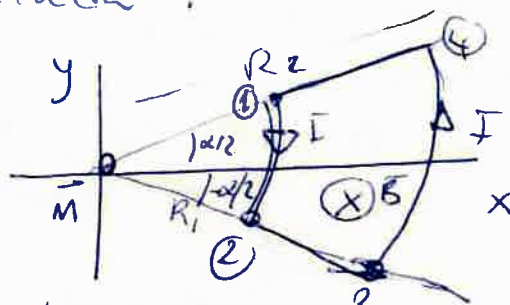
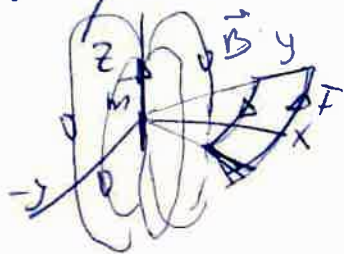
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow -B_2 h + B_2 h = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow B_2 h = \mu_0 \int_{-h}^h dz' \int_0^{2\pi} \rho \omega r' dz' = \mu_0 h \frac{\rho \omega r^2}{r}$$

aproximado $(\frac{r}{R} \ll 1) \Rightarrow B_z(r < R) = \frac{\mu_0 \rho \omega r^2}{2}$; $B_z(r > R) = ???$

Extensión a 8.2

8.2 / Versión ampliada.



El dipolo tiene momento $\vec{m} = m \vec{k}$ centrado en $\vec{r} = 0$, por lo que crea un campo \vec{B} dado por

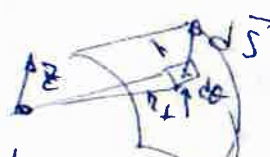
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3 \vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}$$

Piden el flujo de \vec{B} a través de esa espira

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

con $d\vec{S} = R_1 dR_1 d\theta \vec{k}$ basta operar con \vec{B} en $z=0$, con $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k} = r_{\perp} \vec{u}_{\perp}(\theta)$ o sea:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3 m \vec{k} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{m \vec{k}}{r^3} \right\} \Bigg|_{z=0} = - \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\vec{k}}{r_{\perp}^3}$$

luego

$$\phi = \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(- \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r_{\perp}^3} \right) r_{\perp} dR_1 d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) < 0$$

También, dado que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, se tendrá

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

evaluable por la circulación de \vec{A} , dado aquí por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m \vec{k}}{4\pi} \times \frac{R_1 \vec{u}_\perp}{R_1^3} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_1^2} \vec{u}_\perp$$

8.2 (2)

con $\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$. luego

$$\phi = \int_0^2 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{12} + \int_2^3 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{23} + \int_3^4 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{34} + \int_4^1 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{41}$$

como $d\vec{l}_{23}$ y $d\vec{l}_{41}$ son paralelos a \vec{u}_\perp , $\vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$
 que dando para la circulación solo la contribución
 de los tramos curvos, con $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta = 1$

$$\int d\vec{l}_{12} = R_1 d\theta \vec{u}_\theta, z=0, r_\perp = R_1$$

$$\int d\vec{l}_{41} = R_2 d\theta \vec{u}_\theta, z=0, r_\perp = R_2$$

dando

$$\begin{aligned} \phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \frac{R_1 d\theta}{R_1^2} + \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{R_2 d\theta}{R_2^2} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned}$$

b) la fuerza sobre un elemento de corriente $I d\vec{l}$
 es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(r_\perp, z=0) \quad (r_\perp = R_1)$$

Sobre el tramo 1-2, $d\vec{l} = R_1 d\theta \vec{u}_\theta$, luego

$$\vec{F}_{1,2} = \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} d\theta R_1 \vec{u}_\theta \times \left(-\frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\vec{k}}{R_1^3} \right) =$$

$$= -\frac{I \mu_0 m}{4\pi R_1^2} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} u_\perp(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I m}{2\pi R_1^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \vec{i}$$

Para toda la espira $\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}$, se evaluaría
 usando los elementos de línea $d\vec{l}_{12}$, $d\vec{l}_{23}$ etc.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \vec{k} \times \frac{r_{\perp} \vec{u}_{\perp}}{r_{\perp}^3} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_{\perp}^2} \vec{u}_{\perp}$$

8.2 (2)

con $\vec{u}_{\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$, luego

$$\phi = \int_0^2 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{12} + \int_2^3 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{23} + \int_3^4 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{34} + \int_4^1 \vec{A} \cdot d\vec{l}_{41}$$

Como $d\vec{l}_{23}$ y $d\vec{l}_{41}$ son paralelos a \vec{u}_{\perp} , $\vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$
 que dando para la circulación solo la contribución
 de los tramos curvos, con $\vec{u}_{\theta} \cdot \vec{u}_{\theta} = 1$

$$\int d\vec{l}_{12} = R_1 d\theta \vec{u}_{\theta}, z=0, r_{\perp} = R_1$$

$$\int d\vec{l}_{41} = R_2 d\theta \vec{u}_{\theta}, z=0, r_{\perp} = R_2$$

daando

$$\phi = C_A = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \frac{R_1 d\theta}{R_1^2} + \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{R_2 d\theta}{R_2^2} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

b) la fuerza sobre un elemento de corriente $I d\vec{l}$
 es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(r_{\perp}, z=0) \quad (r_{\perp} = R_1)$$

Sobre el tramo 1-2, $d\vec{l} = R_1 d\theta \vec{u}_{\theta}$, luego

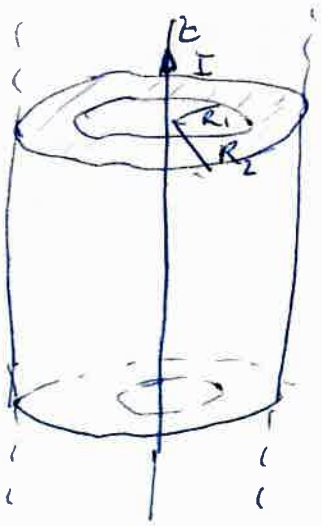
$$\vec{F}_{12} = I \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} d\theta R_1 \vec{u}_{\theta} \times \left(-\frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\vec{v}}{R_1^3} \right) =$$

$$= -\frac{I \mu_0 m}{4\pi R_1^2} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} u_{\perp}(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I m}{2\pi R_1^2} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{i}$$

Para toda la espira $\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}$, se evaluaría
 usando los elementos de línea $d\vec{l}_{12}$, $d\vec{l}_{23}$ etc.

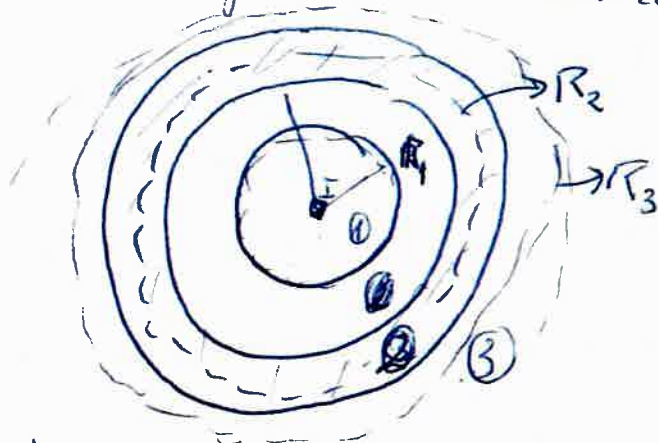
Prob. 8.3/ Se trata de un problema en simetría cilíndrica con distribución de corriente debida solo al hilo central sobre el eje del cilindro "infinito", (1) estando la carcasa cilíndrica formada por material con $\mu = \mu_0 \mu_r$.



Por simetría, puede determinarse \vec{B} en cada región del espacio, a la distancia r del hilo, calculando previamente el vector \vec{H} por la ley de Ampere (\vec{H} es vector dependiente de r y en dirección angular \vec{u}_ϕ , como el debido a un hilo de intensidad I).

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enc}} \Big|_{\Gamma} = I_{\Gamma}$$

Para evaluar la circulación de \vec{H} tomamos curvas amperianas circunferencias de centro sobre OZ



circunferencias R_1 , R_2 y R_3 en las tres regiones indicadas; como

$$\vec{H} = H(r) \vec{u}_\phi$$

$$d\vec{\ell} = r d\phi \vec{u}_\phi$$

a cada r fijo:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint H d\ell = H 2\pi r = I_{\Gamma}$$

y por tanto

8.3
②

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 2\pi r = I_{R_1} = I \\ H_2 2\pi r = I_{R_2} = I \\ H_3 2\pi r = I_{R_3} = I \end{array} \right\} \vec{H}_j = H_j \vec{u}_\phi$$


a) no fluye corriente \vec{J} por la carcasa cilíndrica:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\phi, \quad 0 < r < R_1 \\ \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\phi, \quad R_1 < r < R_2 \\ \vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\phi, \quad R_2 < r \end{array} \right.$$

b) El campo \vec{B} será, de $\vec{B} = \mu \vec{H}$:


$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \\ \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \\ \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \end{array} \right.$$

c) La magnetización (en regiones \exists existe sí) \vec{M}



$$\vec{M} = \vec{M}_2 = (\mu_2 - 1) \vec{H}_2 = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

d) La corriente superficial de magnetización es:



$$\begin{aligned} \vec{J}_m(R_1) &= \vec{M} \times \vec{n}_{2 \rightarrow 1} = \vec{M}(R_1) \times (-\vec{u}_r) = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi R_1} \vec{k} \\ \vec{J}_m(R_2) &= \vec{M}(R_2) \times \vec{n}_{2 \rightarrow 3} = \vec{M}(R_2) \times \vec{u}_r = -(\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi R_2} \vec{k} \end{aligned}$$

en sentidos opuestos.

Siendo la corriente volumétrica de magnetización:

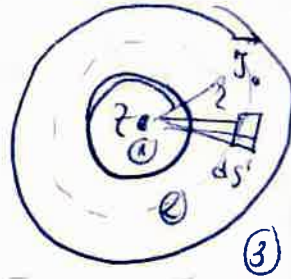
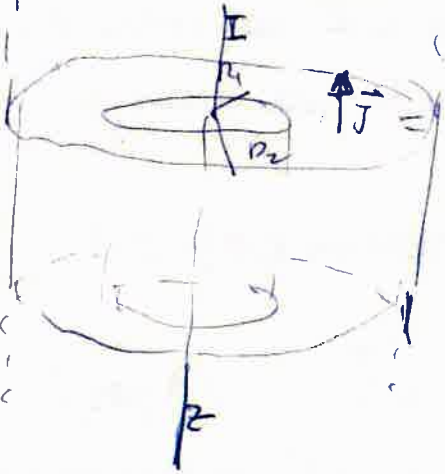
$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \left[\nabla \times \frac{\vec{u}_\phi}{r} \right] (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi} = 0$$

pues $\nabla \times \frac{\vec{u}_\phi}{r} = \nabla \times \left(\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0$

Apéndice:

8.3) Ampliado.

Sobre el problema 8.3 consideremos el caso en que también hubiera corriente $\vec{J} = J_0 \vec{u}_z$ fluyendo por la cáscara cilíndrica



$$ds' = r' dr' d\theta' \vec{u}_z$$

Con las tres curvas amperianas de longitud $2\pi r$ en las zonas ①, ② y ③, la ley de Ampere a \vec{H} daría ahora

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{int}$$

$$\begin{cases} H_1 2\pi r = I & ; \quad B_1 = \mu_0 H_1 \quad (\text{en } \vec{u}_\theta) \\ H_2 2\pi r = I + \int_{R_1}^{r < R_2} J(r') r' dr' / d\theta' = I + J_0 \pi (r^2 - R_1^2) \\ H_3 2\pi r = I + \int_{R_1}^{R_2} J ds' = I + J_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) \end{cases}$$

con $\vec{H}_j = H_j(r) \vec{u}_\theta$

y magnetización en ②

$$\vec{M} = (\mu_2 - 1) \vec{H}_2$$

$$= (\mu_2 - 1) \left(\frac{I}{2\pi r} + \frac{J_0 \pi (R_2^2 - R_1^2)}{2\pi r} \right) \vec{u}_\theta$$

$$= (\mu_2 - 1) \left(\frac{I - J_0 \pi R_1^2}{2\pi r} + \frac{J_0}{2} r \right) \vec{u}_\theta = M_\theta \vec{u}_\theta$$

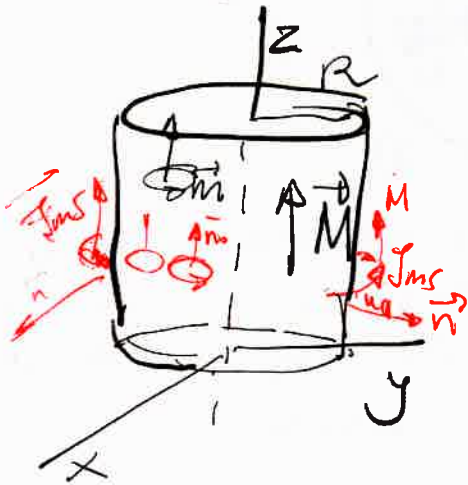
y hay ahora corriente:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\theta) \vec{u}_z$$

$$= (\mu_2 - 1) J_0 \vec{u}_z \quad (\text{axial}) \quad \text{en } R_1 < r < R_2$$

Prob 8.4 / I_{magn} .

Se trata de un material de imantación permanente axial, es un modelo de imán cilíndrico



La magnetización es

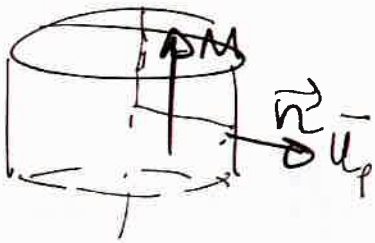
$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z \quad (\text{A/m})$$

Como es axial aparecerá sobre la cara lateral del

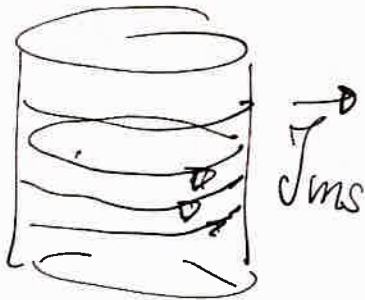
cilindro una corriente de magnetización superficial dada por

$$\vec{J}_{\text{ms}} \cong \vec{M} \times \vec{n}$$

siendo \vec{n} el vector normal a la superficie lateral y que va del medio hacia afuera luego



$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{ms}} &= M_0 \vec{e}_z \times \vec{u}_\phi = M_0 \vec{u}_z \times \vec{u}_\phi \\ &= M_0 \vec{u}_\phi \quad (\text{aximutal, en } \vec{u}_\phi) \end{aligned}$$



es una corriente laminar sobre la cara lateral cilindro.

El campo \vec{B} se calculará

lo que da:

$$d\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 M_0 R dz' d\varphi'}{4\pi} \frac{(z-z')\vec{U}_\varphi(\varphi') + R\vec{v}}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

pues $\vec{U}_\varphi \times \vec{U}_\rho = -\vec{v}$ y $\vec{U}_\varphi \times \vec{v} = \vec{U}_\rho$

Como $\int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' = 0$

al integrar en φ' el versor $\vec{U}_\rho = \cos\varphi' \vec{i} + \sin\varphi' \vec{j}$
se tiene finalmente:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 M_0 R^2 2\pi}{4\pi} \int_{z'-L/2}^{z'+L/2} \frac{dz'}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \vec{v}$$

donde he tomado el origen en el plano situado en la mitad de la altura del cilindro z_0 , como se hizo con el solenoide.

La integral que queda es la que ya he salido en otras ocasiones, dando, como para el solenoide finito

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{v} \frac{\mu_0 M_0}{2} \left(\frac{z+L/2}{\sqrt{R^2 + (z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2 + (z-L/2)^2}} \right)$$

Si: $L \rightarrow \infty$

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{v} \frac{\mu_0 M_0}{2} (1 - (-1)) = \mu_0 M_0 \vec{v} \vec{e}_z$$

que presenta la misma forma que el campo creado por un solenoide con devanado casi continuo de N espiras de corriente I :

$$\vec{B}_{\text{solenoid}} = \vec{z} \frac{\mu_0}{2} \frac{N}{L} I \left(\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + R^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + R^2}} \right)$$

Entonces el imán se comporta como un solenoide identificando la magnetización y su corriente asociada de magnetización superficial por:

$$M_0 \rightarrow \frac{N}{L} I = nI \quad (\text{A/m})$$

$$\text{y } \vec{J}_{ms} \rightarrow \frac{N}{L} I \vec{u}_\varphi \quad (\text{A/m})$$

El campo \vec{H} viene de

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

dando (sobre OZ sólo)

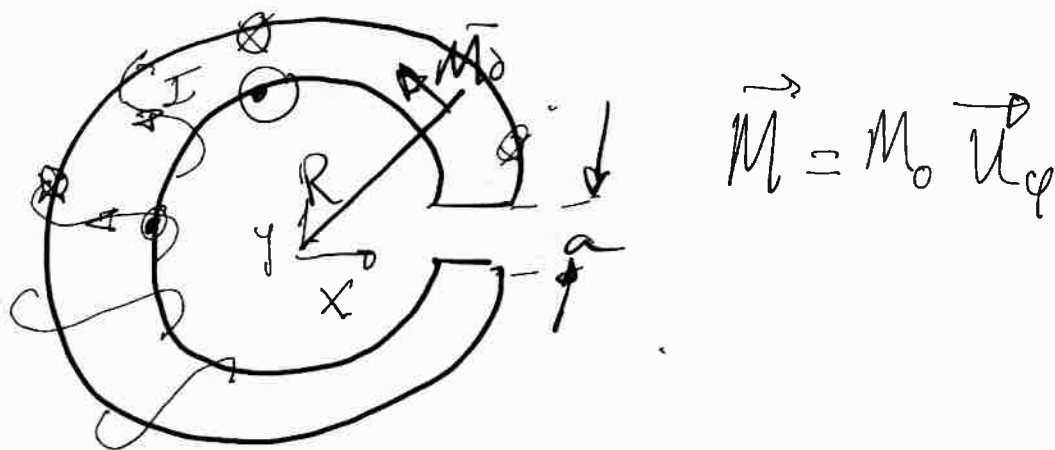
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M_0 \vec{z}$$



Prob. 8.5/ Toroide con entrehierro.

Caso común de un circuito magnético, sirve para crear campos intensos en la zona del hueco

El material es magnético, de imantación permanente con magnetización uniforme en módulo y dirigida en sentido angular \vec{u}_φ como dice



Para determinar el vector \vec{H} , que tomará un valor H_m dentro del material y H_a en el entrehierro, se puede aplicar la ley de Ampere, contando con la simetría a lo largo del eje del toro:

$$\vec{H} = H_m \vec{u}_\varphi \quad \text{en el material}$$

$$\vec{H} = H_a \vec{u}_\varphi \quad \text{en el } \underline{a}$$

despreciando efectos de borde, con

$$\vec{H} = H \vec{u}_\varphi \quad \text{y} \quad d\vec{l} = dl \vec{u}_\varphi$$

Se tiene

$$\oint_{\mathcal{R}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{R}} H dl = I_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\mathcal{R}}$$

$\mathcal{C} = 2\pi R$

luego:

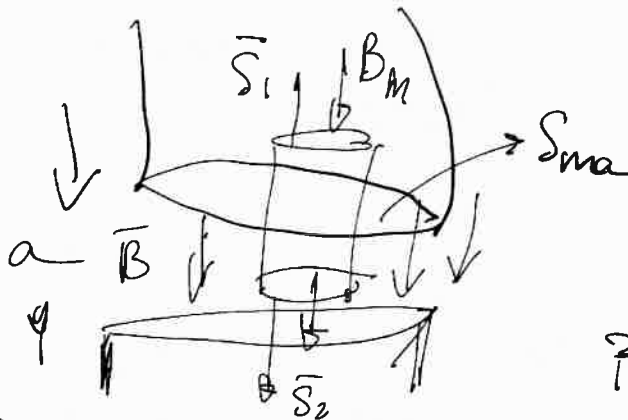
$$H_m (2\pi R - a) + H_a a = NI \quad (1)$$



Pues hay N espiras de corriente atravesando la superficie $S_{\mathcal{R}}$ apoyada en \mathcal{R} que tiene $L_{\mathcal{R}} = 2\pi R$. (NI forman corriente superficial que es en sentido POLOIDAL)

Necesitamos otra ecuación para tener H_m y H_a . Aprovechando la ley de Gauss para \vec{B} , $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, tomando superficie cilíndrica que sale del medio al vacío:

El campo \vec{B} pasa del valor B_m en el medio a B_a fuera, por ser CASI perpendicular a S_{sm}



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{S}_1 \cdot \vec{B}_m + \vec{S}_2 \cdot \vec{B}_a = S(-B_m + B_a) = 0$$

Es decir:

y como $B_a - B_m = 0$ (continuo)

se tiene (de $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}_0)$):

que, con (1) da: $\mu_0 H_a = \mu_0 (H_m + M_0)$ (2)

$$\begin{cases} \vec{H}_m = \frac{NI - M_0 a}{2\pi R} \vec{u}_\varphi \\ \vec{H}_a = \frac{NI + (2\pi R - a)M_0}{2\pi R} \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Si $a=0$ se tendría:

$$H_m = \frac{NI}{2\pi R} = H \quad \text{en todo punto del eje } z.$$

y $B_m = B = \mu_0 (H + M_0)$

ambos en \vec{u}_φ .

Prob. 8.6/

El supuesto a_f es como el caso anterior pero ahora el medio es lineal por lo que la magnetización a lo largo del eje toroidal es:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}$$

por lo que, en el material

$$M_o = (\mu_r - 1) H_m$$

y en el vacío

$$M_a = (1 - 1) H_a = 0$$

Ahora la ley de Ampere a \vec{H} da:

$$\oint_{l=2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_R \Rightarrow$$

$$H_m (2\pi R - a) + H_a a = NI \quad (1)$$

y por la continuidad de B como antes

$$B = \mu_o \mu_r H$$

$$B_m = B_a \Rightarrow$$

$$\mu_o \mu_r H_m = \mu_o \cdot 1 \cdot H_a \quad (2)$$

se tienen las dos ecuaciones que dan:

$$H_m = \frac{NI}{(\mu_r - 1)a + 2\pi R} \quad (\text{en } \vec{u}_\varphi)$$

y

$$H_a = \mu_r H_m = \frac{\mu_r NI}{(\mu_r - 1)a + 2\pi R} \quad (\text{en } \vec{u}_\varphi)$$

En b) se cierra el hueco con el mismo material (podría ponerse otro material) por lo que

$$2\pi R H = NI \quad (1')$$

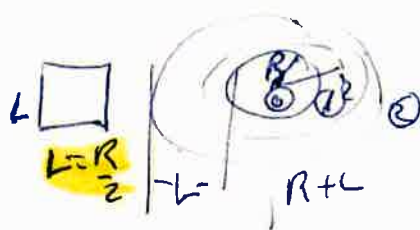
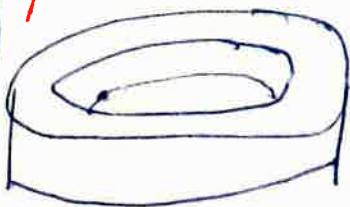
$$y \quad B = \mu_0 \mu_r H \quad (2')$$

dando
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \vec{u}_\varphi$$

y la magnetización
$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}.$$

$\mu_r = r/R$ pág. 85 libro problem.

8.7
bis



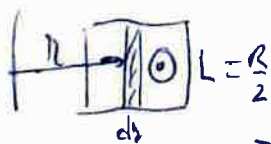
$R < r < R+L$
en \odot y \otimes $\vec{B} = 0$

$$\mu_r = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

H no es uniforme en r:

$$1) 2\pi r H = NI \Rightarrow \vec{H} = \frac{NI}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

$$2) \phi = \int_{\text{Secc}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r=R}^{r=R+L} \left[\mu_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{NI}{2\pi r} \right] \vec{u}_\phi \cdot \left(\frac{B}{2}\right) dr \vec{u}_\phi$$



$$= \frac{\mu_0 NI R}{\pi} \frac{5}{32} \quad (\text{por cada espira})$$

$$3) U_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} L_{\text{ind}} I^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_R^{R+L} H B 2\pi r L dr$$

$$4) \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times [(\mu_r - 1) H \vec{u}_\phi]$$

$$= \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \frac{1}{r} \right] \frac{NI}{2\pi} = \frac{NI}{\pi R^2} \vec{u}_r$$

$$5) \vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \vec{n} = (\mu_r - 1) H \vec{u}_\phi \times \vec{u}_r$$

$$= - \frac{5NI}{12\pi R} \vec{u}_\phi$$

$r=R+L = \frac{3}{2}R$

$$I_m = \int \vec{J}_m dV + \int dS \vec{J}_{sm} = \int \partial_x a_i dV + \oint dS \vec{M} \times \vec{n}$$

$$= \oint dS \vec{r} \times \vec{M} + \oint \vec{M} \times d\vec{S} = 0$$