# Ejemplos adicionales del Tema 1. Lagrangiana.

(Ver los problemas resueltos de los Apuntes de Mecánica Analítica)

(Mec. Ana. GIA)

## ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

**Ejercicio de clase. Mecánica Analítica 3º** 2.12.2011

*El test consta de 10 apartados, cada uno tiene 5 respuestas. Sólo una es correcta; márquenla en la plantilla adjunta.*

---

**P)** *La Lagrangiana* $L$ *de un sistema con dos grados de libertad es* $L = T - U$ *, donde* $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ *y* $U = \frac{k}{2}(q_2^2\ \dot{q}_1 + q_1^2\ \dot{q}_2) + V(q_1)$ *es un potencial generalizado del que se derivan las componentes de las fuerzas generalizadas* ($Q_j$) *que actúan en el sistema. La función* $V = V(q_1)$ *tiene derivada* $V' = V'(q_1)$ *continua y* $k$ *es una constante. Si no se imponen ligaduras al sistema:*

**P1)** Las fuerzas generalizadas satisfacen:

**A)** $Q_1 = k\,\dot{q}_2\left(q_2 - q_1\right) - V'$ , $Q_2 = -k\,\dot{q}_2\left(q_2 - q_1\right)$
**B)** $Q_1 = -V'$ , $Q_2 = 0$
**C)** $Q_1 = k\,q_2\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right) - \dot{q}_1 V'$ , $Q_2 = -k\,q_2\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right)$
**D)** $Q_1 = -k\,\dot{q}_1\left(q_2 - q_1\right) + V'$ , $Q_2 = k\,\dot{q}_2\left(q_2 - q_1\right)$
**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P2)** La función de energía $H = H(q, \dot{q})$ asociada a la Lagrangiana es

**A)** $2T - U$
**B)** $T + U$
**C)** $T + V$
**D)** $T$
**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P3)** Los momentos canónicos generalizados correspondientes a cada coordenada $q_j$ son:

**A)** $p_1 = \dot{q}_1$ *y* $p_2 = \dot{q}_2$
**B)** $p_1 = \dot{q}_1 + \frac{k}{2}q_2^2$ *y* $p_2 = \dot{q}_2 + \frac{k}{2}q_1^2$
**C)** $p_1 = \dot{q}_1 + k\,q_2\,\dot{q}_1$ *y* $p_2 = \dot{q}_2 + k\,q_1\,\dot{q}_2$
**D)** $p_1 = \dot{q}_1 + \frac{k}{2}q_1^2$ *y* $p_2 = \dot{q}_2 + \frac{k}{2}q_2^2$
**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P4)** Puede afirmarse que:

**A)** $T$ es una constante del movimiento.
**B)** $V$ es una constante del movimiento.
**C)** $T + V$ es una constante del movimiento.
**D)** $p_2$ es una constante del movimiento.
**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P5)** *Si se incorpora ahora al sistema la ligadura* $q_2^2\ \dot{q}_1 + q_1^2\ \dot{q}_2 = 0$ , se puede afirmar que:

**A)** La ligadura es holónoma.
**B)** $p_2$ es una constante del movimiento.
**C)** La función de energía $H = H(q, \dot{q})$ es una constante del movimiento.
**D)** $T$ es constante del movimiento.
**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P6)** Una partícula se mueve en el plano horizontal ***xy*** por acción de una única fuerza $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$ , donde $\gamma$ es una constante positiva. Usando como variables generalizadas las coordenadas polares planas $(r,\theta)$, las componentes generalizadas de la fuerza sobre la partícula son:

**A)** $Q_r = -\gamma \dot{r} \quad y \quad Q_\theta = -\gamma r \dot{\theta}$

**B)** $Q_r = -\gamma \dot{r} \quad y \quad Q_\theta = -\gamma r^2 \dot{\theta}$

**C)** $Q_r = -\gamma (\dot{r} + r\dot{\theta}) \quad y \quad Q_\theta = 0$

**D)** $Q_r = -\gamma \theta \dot{r} \quad y \quad Q_\theta = -\gamma r \dot{\theta}^2$

**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P7)** Para la función dinámica $u(q,p,t)$ con respecto a un sistema de $N$ grados de libertad con Hamiltoniano $H = H(q,p,t)$, puede asegurarse que:

**A)** $\partial u/\partial p_k = [q_k, u]$

**B)** $\partial u/\partial q_k = [p_k, u]$

**C)** $du/dt = [u,H]$

**D)** $d[u,H]/dt = [\dot{H},u] + [H,\dot{u}]$

**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P8)** Para un sistema hamiltoniano de un grado de libertad, la transformación de contacto $(q,p) \to (Q,P)$ dada por las relaciones $Q = e^{\omega t} q^a \cos(b\,p)$ , $P = e^{-\omega t} q^a \operatorname{sen}(b\,p)$ (los parámetros $a,b$ y $\omega$ son constantes distintas de cero):

**A)** Es canónica si $b\,a = 1$ para todo valor de $\omega$

**B)** Es canónica si $b = 1/2, a = 2$ , para todo valor de $\omega$

**C)** Es canónica si $b = 2, a = 1/2$ , para todo valor de $\omega$

**D)** No es canónica, cualesquiera que sean los parámetros.

**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P9)** El Hamiltoniano asociado a un sistema lagrangiano de un grado de libertad es $H(q,p) = p^2/2 + A(q)p + B(q)$, donde $A$ y $B$ son funciones conocidas. Puede asegurarse que

**A)** $p\,B$ es una constante del movimiento.

**B)** $L(q,\dot{q}) = (\dot{q}^2 + A^2)/2 + \dot{q}A - B$

**C)** $L(q,\dot{q}) = \dot{q}^2/2 - \dot{q}A - B$

**D)** $L(q,\dot{q}) = (\dot{q} - A)^2/2 - B$

**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

**P10)** El potencial generalizado de un sistema lagrangiano holónomo natural correspondiente a una partícula de masa $m$ , posición $\vec{r}$ y energía cinética $T = m|\vec{v}|^2/2$, es $U(\vec{r},\vec{v}) = m\vec{\omega}_0 \cdot (\vec{v} \times \vec{r})/2$, donde $\vec{\omega}_0$ es un vector constante. Las variables generalizadas se corresponden según $(q,\dot{q},p) \to (\vec{r},\vec{v},\vec{p})$. Puede asegurarse que:

**A)** La función de energía es $H(\vec{r},\vec{v}) = T$

**B)** $dT/dt = -|\vec{\omega}_0| T$

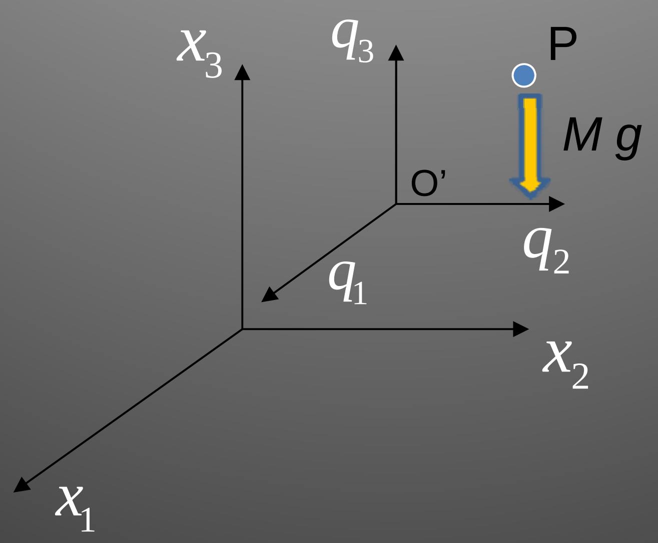
**C)** La fuerza asociada a $U$ es $\vec{Q} = m\vec{\omega}_0 \times \vec{r}$

**D)** $\vec{p} = m\,\vec{v}$

**E)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

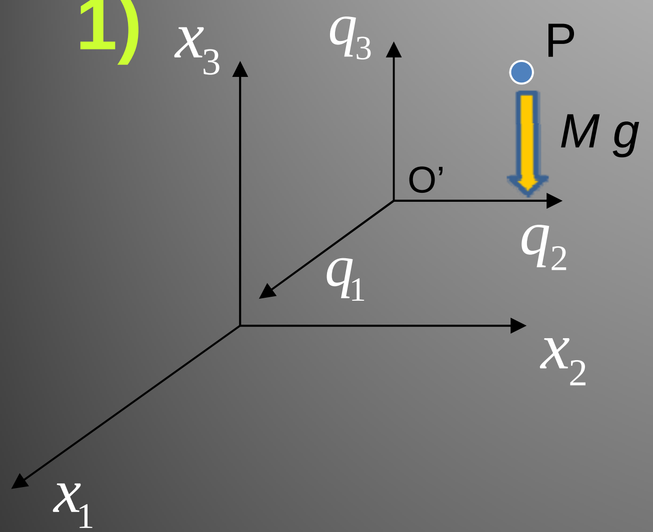
# Ejemplos:

**1)** Plantear explícitamente las ecuaciones de Lagrange para una partícula de masa M moviéndose en un triedro inercial y sometida al peso.
Usar como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de un triedro que se mueve paralelamente al anterior y su origen (O') se desplaza con una ley $\vec{r}_{O'}(t)$ arbitraria.



## Solución:

**1)**




$$\vec{r}_{o'}(t) = x_{o'}(t)\vec{e}_1 + y_{o'}(t)\vec{e}_2 + z_{o'}(t)\vec{e}_3,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{o'}(t) + q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \vec{e}_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_3,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \dot{q}_1\vec{e}_1 + \dot{q}_2\vec{e}_2 + \dot{q}_3\vec{e}_3,$$

$$T = \tfrac{1}{2}M\,\vec{v}^{\,2} = \tfrac{1}{2}M\left(\vec{v}_{o'}^{\,2} + \dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2} + \dot{q}_3^{\,2} + \right.$$
$$\left. +2\dot{q}_1(\vec{v}_{o'}\cdot\vec{e}_1) + 2\dot{q}_2(\vec{v}_{o'}\cdot\vec{e}_2) + 2\dot{q}_3(\vec{v}_{o'}\cdot\vec{e}_3)\right),$$

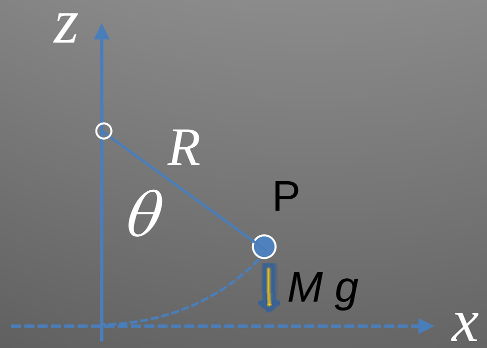
$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = M\left(\dot{q}_j + (\vec{v}_{o'}\cdot\vec{e}_j)\right), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = M\left(\ddot{q}_j + (\vec{a}_{o'}\cdot\vec{e}_j)\right),$$

$$\vec{F} = -Mg\vec{e}_3, \quad Q_1 = \vec{F}\cdot\vec{a}_1 = 0, \quad Q_2 = \vec{F}\cdot\vec{a}_2 = 0, \quad Q_3 = \vec{F}\cdot\vec{a}_3 = -Mg,$$

$$M\left(\ddot{q}_1 + \ddot{x}_{o'}(t)\right) = 0, \quad M\left(\ddot{q}_2 + \ddot{y}_{o'}(t)\right) = 0, \quad M\left(\ddot{q}_3 + \ddot{z}_{o'}(t)\right) = -Mg,$$

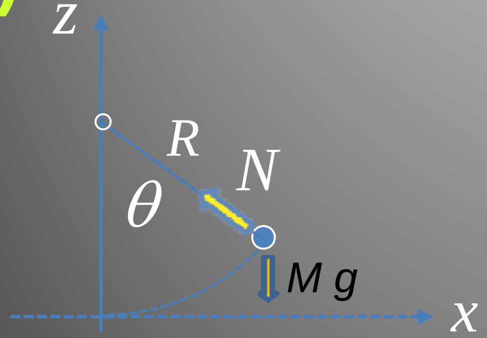
# Ejemplos:

**2)** Plantear explícitamente las ecuaciones de Lagrange para una péndulo ideal: partícula de masa M moviéndose en un plano vertical y sujeta por un hilo ideal. Usar como coordenada generalizada el ángulo que forma el hilo con la vertical descendente.



# Solución:

**2)**




$$\vec{r} = R(\sin\theta\,\vec{e}_1 + (1-\cos\theta)\vec{e}_3),$$

$$\vec{a}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_3),$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_3),$$

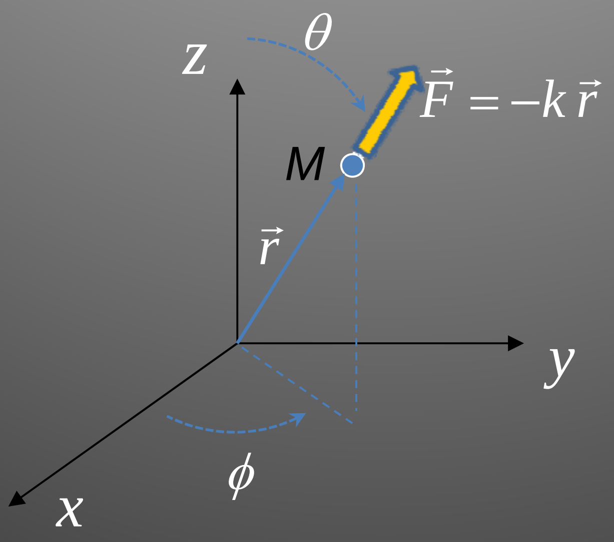
$$\vec{F} = -Mg\vec{e}_3 + N(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_3),$$

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \vec{F}\cdot\vec{a}_\theta, \quad \Rightarrow \quad MR^2\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta$$

# Ejemplos:

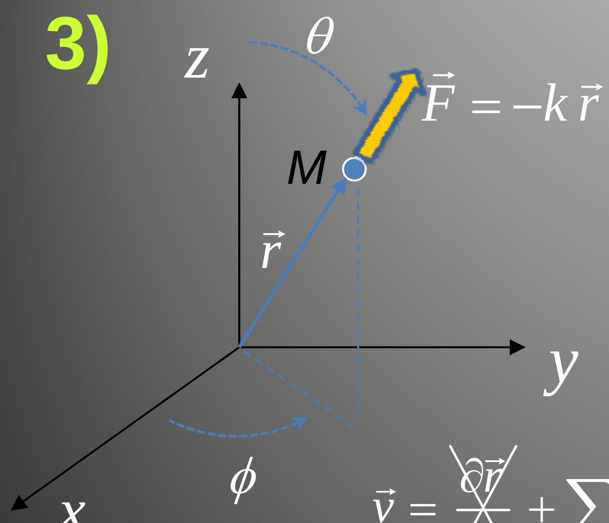
**3)** Una partícula de masa M se mueve en un triedro ($O,x,y,z$) bajo la acción de una fuerza atractiva desde el origen $O$ del triedro y proporcional a la distancia. Plantear explícitamente las ecuaciones de Lagrange usando como coordenadas generalizadas las coordenadas esféricas de la partícula $r,\theta,\phi$ .



## Solución:

Coordenadas generalizadas: $q_1, q_2, q_3 = r, \theta, \phi$

**3)**




$$\vec{r} = r\left(\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3\right),$$

$$\vec{a}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3,$$

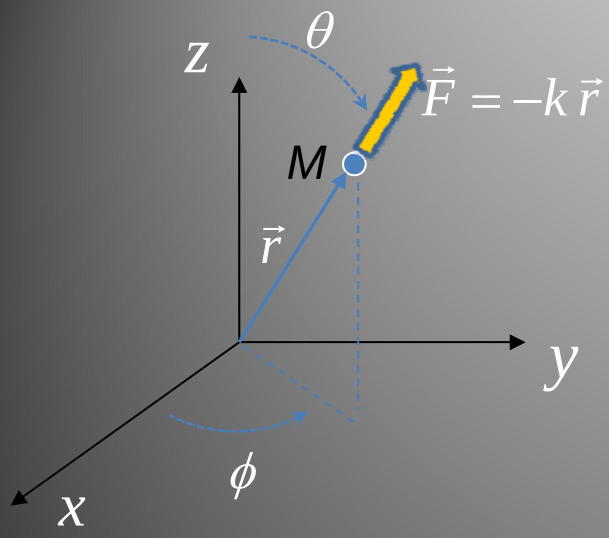
$$\vec{a}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\left(\cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_3\right),$$

$$\vec{a}_\phi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = r\left(-\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_2\right),$$

$$\vec{v} = \cancel{\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}} + \sum_j \dot{q}_j\vec{a}_j = \dot{r}\vec{a}_r + \dot{\theta}\vec{a}_\theta + \dot{\phi}\vec{a}_\phi, \qquad \boxed{T = \tfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)}$$

$$Q_r = \vec{F}\cdot\vec{a}_r = -kr, \quad Q_\theta = \vec{F}\cdot\vec{a}_\theta = 0, \quad Q_\phi = \vec{F}\cdot\vec{a}_\phi = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{2}M\left(2r\dot{\theta}^2 + 2r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}M\left(2r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\,\cos\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial\phi} = 0,$$




$$\boxed{T=\tfrac{1}{2}M\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right),}$$

$$Q_r=\vec{F}\cdot\vec{a}_r=-kr,\quad Q_\theta=\vec{F}\cdot\vec{a}_\theta=0,\quad Q_\phi=\vec{F}\cdot\vec{a}_\phi=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{2}M\left(2r\dot{\theta}^2+2r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right),\quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=\tfrac{1}{2}M\left(2r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=\tfrac{1}{2}M\left(2\dot{r}\right),\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=\tfrac{1}{2}M\left(2r^2\dot{\theta}\right),\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}=\tfrac{1}{2}M\left(2r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=M\ddot{r},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=\tfrac{1}{2}M\left(4r\dot{r}\dot{\theta}+2r^2\ddot{\theta}\right),\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}=\tfrac{1}{2}M\left(4r\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta+2r^2\ddot{\phi}\sin^2\theta+4r^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right),$$

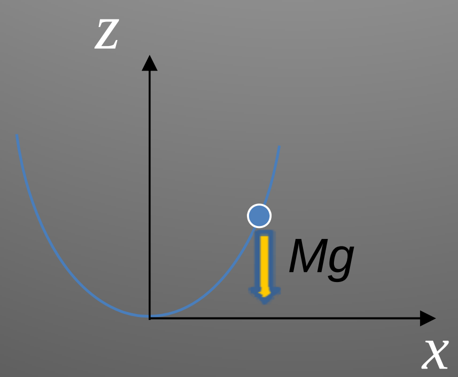
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r,\quad\Rightarrow\quad M\ddot{r}-Mr\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)=-kr,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta,\quad\Rightarrow\quad Mr\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)-Mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta=0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}-\frac{\partial T}{\partial \phi}=Q_\phi,\quad\Rightarrow\quad Mr\left(2\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta+r\ddot{\phi}\sin^2\theta+2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right)=0,$$

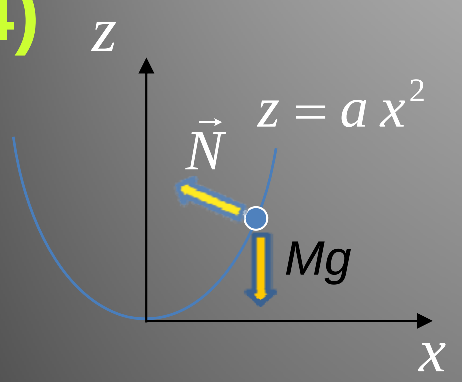
## Ejemplos:

**4)** Una partícula de peso *Mg* se mueve sin rozamiento sobre la parábola $z = a\,x^2$ (donde $a$ es una constante). Plantear la ecuacion de Lagrange para el movimiento de la partícula usando $q \equiv x$ como coordenada generalizada.



## Solución:

**4)**




$$q \equiv x,$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + ax^2\vec{k}, \qquad \vec{a}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + 2ax\vec{k},$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + 2ax\dot{x}\vec{k},$$

$$T = \tfrac{1}{2}M\vec{v}^2 = \tfrac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2\right) = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2\left(1 + 4a^2x^2\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4a^2M\,\dot{x}^2x, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + 8a^2M\dot{x}^2x,$$

$$\vec{F} = -Mg\vec{k} + \vec{N}, \qquad Q_x = \vec{F}\cdot\vec{a}_x = -Mg2ax, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + 8a^2M\dot{x}^2x - 4a^2M\,\dot{x}^2x = -Mg2ax,$$

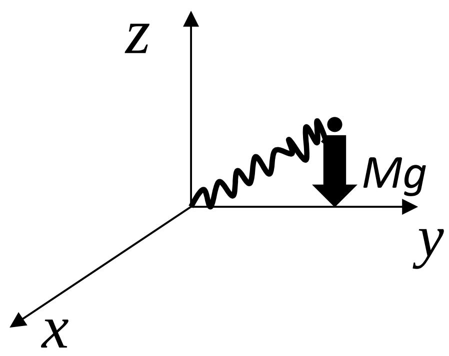
$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + 4a^2\dot{x}^2x = -g2ax,}$$

**Ejemplo (ligaduras no holónomas ideales):**

Una partícula de peso *Mg* se mueve en un triedro inercial *x,y,z* bajo la acción de la fuerza de un muelle ideal de constante elástica *K* y longitud natural despreciable. El vector velocidad de la partícula es paralelo en cada instante al vector

$$\vec{u}(t) = (2+\sin\omega t)\vec{i} + (3-\cos\omega t)\vec{j} + (4+\sin\omega t)\vec{k},$$

siendo $\omega$ una constante conocida. Obtener las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento de la partícula.



**Solución (ligaduras no holónomas ideales):**

Coordenadas generalizadas *x,y,z,* $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{v}$ paralelo a $\vec{u}(t)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\dot{x}}{2+\sin\omega t} = \dfrac{\dot{y}}{3-\cos\omega t} = \dfrac{\dot{z}}{4+\sin\omega t},$

2 ligaduras no holónomas:

$$(1):\quad (3-\cos\omega t)\dot{x} - (2+\sin\omega t)\dot{y} = 0, \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = (3-\cos\omega t), \quad B_{12} = -(2+\sin\omega t), \\ B_{13} = B_1 = 0, \end{cases}$$

$$(2):\quad (4+\sin\omega t)\dot{y} - (3-\cos\omega t)\dot{z} = 0, \Rightarrow \begin{cases} B_{22} = (4+\sin\omega t), \quad B_{23} = -(3-\cos\omega t), \\ B_{21} = B_2 = 0, \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = Mgz + \tfrac{1}{2}K(x^2 + y^2 + z^2), \quad L = T - U,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{i} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot \vec{i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{j} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot \vec{j},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{k} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot \vec{k},$$

**Solución (ligaduras no holónomas ideales):**

$$
\begin{cases}
M\ddot{x} + Kx = \mu_1(3 - \cos\omega t), \\
M\ddot{y} + Ky = -\mu_1(2 + \sin\omega t) + \mu_2(4 + \sin\omega t), \\
M\ddot{z} + Kz + Mg = -\mu_2(3 - \cos\omega t), \\
(3 - \cos\omega t)\dot{x} - (2 + \sin\omega t)\dot{y} = 0, \quad (1) \\
(4 + \sin\omega t)\dot{y} - (3 - \cos\omega t)\dot{z} = 0, \quad (2)
\end{cases}
$$

**Incógnitas:** $x(t), y(t), z(t), \mu_1(t), \mu_2(t),$

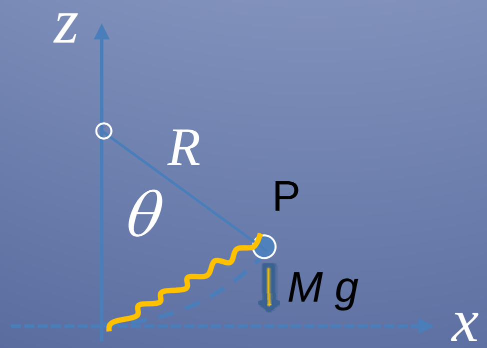
**Condiciones iniciales:**

$$x(t_0), y(t_0), z(t_0),$$

$\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0),$ Compatibles con (1) y (2) !!

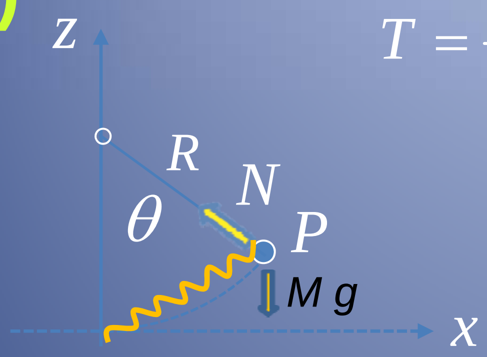
# Más ejemplos!

1) Determinar la lagrangiana de un péndulo simple (partícula de peso *Mg*) de longitud *R* cuando además sobre el péndulo actúa la fuerza de un muelle ideal de constante elástica *K* . Usar el ángulo $\theta$ como coordenada generalizada y escribir la ecuación del movimiento a partir de la lagrangiana.



# Solución:

**1)**




$$\vec{r} = R(\sin\theta\,\vec{e}_1 + (1-\cos\theta)\vec{e}_3), \quad \vec{a}_\theta = \cdots, \quad \vec{v} = \cdots,$$

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2,$$

$$U = Mgz + \tfrac{1}{2}K\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 =$$

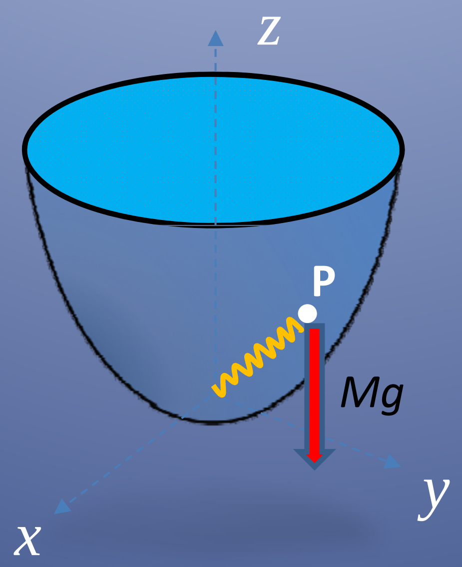
$$= MgR(1-\cos\theta) + KR^2\left(1-\cos\theta\right) =$$

$$= R(Mg+KR)\left(1-\cos\theta\right),$$

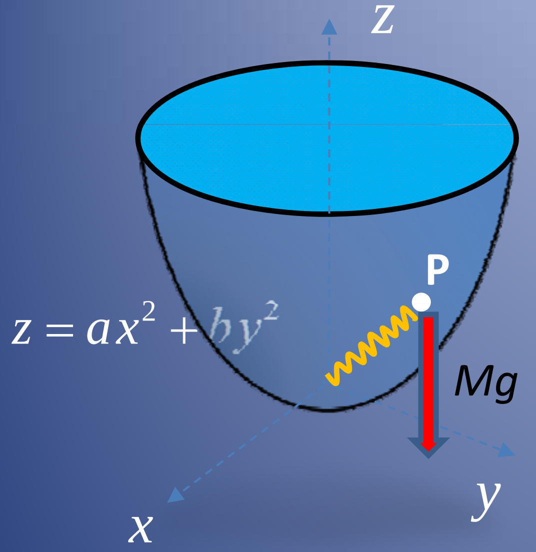
$$L = T - U = \tfrac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 - R(Mg+KR)\left(1-\cos\theta\right),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad MR^2\ddot{\theta} + R(Mg+KR)\sin\theta = 0$$

2) Una partícula de peso Mg se mueve sin rozamiento sobre el paraboloide, de eje vertical, $z = ax^2 + by^2$. Sobre la partícula actúa además un muelle ideal de constante elástica K, cuyo extremo está fijo al origen de coordenadas. Determinar la lagrangiana de la partícula y sus ecuaciones del movimiento usando *x, y,* como coordenadas generalizadas.



2) Solución.




$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (ax^2 + by^2)\vec{k},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + 2(ax\dot{x} + by\dot{y})\vec{k},$$

$$T = \tfrac{1}{2}M\vec{v}^2 = \tfrac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 4(ax\dot{x} + by\dot{y})^2\right),$$

$$U = Mgz + \tfrac{1}{2}K\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 =$$

$$= Mg(ax^2 + by^2) + \tfrac{1}{2}K\left(x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2)^2\right),$$

$$L = T - U =$$

$$= \tfrac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 4(ax\dot{x} + by\dot{y})^2\right) - Mg(ax^2 + by^2) - \tfrac{1}{2}K\left(x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2)^2\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\left(\dot{x} + 4ax(ax\dot{x} + by\dot{y})\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \tfrac{1}{2}M\left(8(ax\dot{x} + by\dot{y})a\dot{x}\right) - 2Mgax - \tfrac{1}{2}K\left(2x + y^2 + 4ax(ax^2 + by^2)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\left(\dot{y} + 4by(ax\dot{x} + by\dot{y})\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \tfrac{1}{2}M\left(8(ax\dot{x} + by\dot{y})a\dot{y}\right) - 2Mgby - \tfrac{1}{2}K\left(2y + x^2 + 4by(ax^2 + by^2)\right)$$

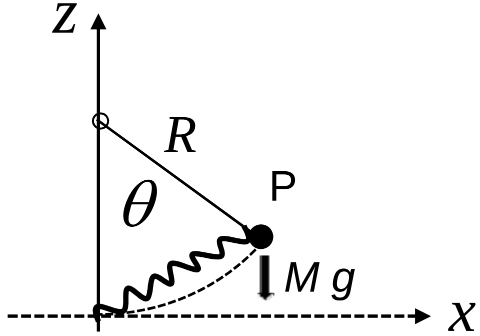
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \cdots, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \cdots,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M(1+4a^2x^2)\ddot{x} + x\left(2agM + K\right) + 2a^2Kx^3 + \\ \quad + x\left(2abKy^2 + 4aM(a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2) + 4abMy\ddot{y}\right) = 0, \\ M(1+4b^2y^2)\ddot{y} + (2bgM + K)y + 2b^2Ky^3 + \\ \quad + y\left(2abKx^2 + 4bM(a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2) + 4abMx\ddot{x}\right) = 0, \end{cases}$$

## Ejemplos de sistemas con leyes de conservación “triviales”

1)




$$\Rightarrow \quad L = T - U = \tfrac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 - R(Mg + KR)\big(1 - \cos\theta\big),$$

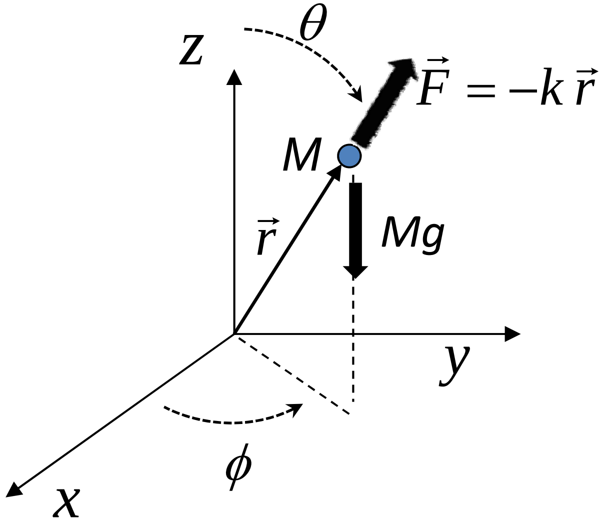
$$\Rightarrow \quad L(\theta,\dot{\theta}) \quad \Rightarrow \quad E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \text{ constante}$$

$$\Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2,$$

$$E = T + U = \tfrac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 + R(Mg + KR)\big(1 - \cos\theta\big) = \text{constante}$$

# Ejemplos de sistemas con leyes de conservación "triviales"

2)




$$q = r, \theta, \phi$$

$$T = \tfrac{1}{2} M \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right),$$

$$U = \tfrac{1}{2} k r^2 + Mg\, r \cos\theta,$$

$$\Rightarrow \quad L = T - U = L(r, \theta, \cancel{\phi}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \cancel{t}), \quad \Rightarrow$$

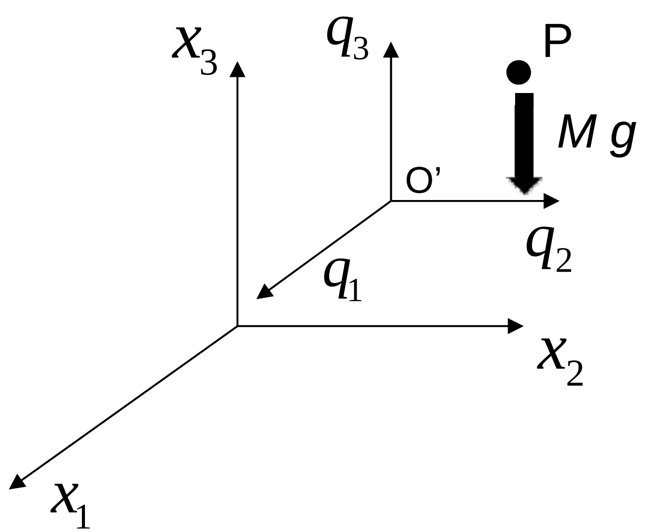
2 leyes de conservación

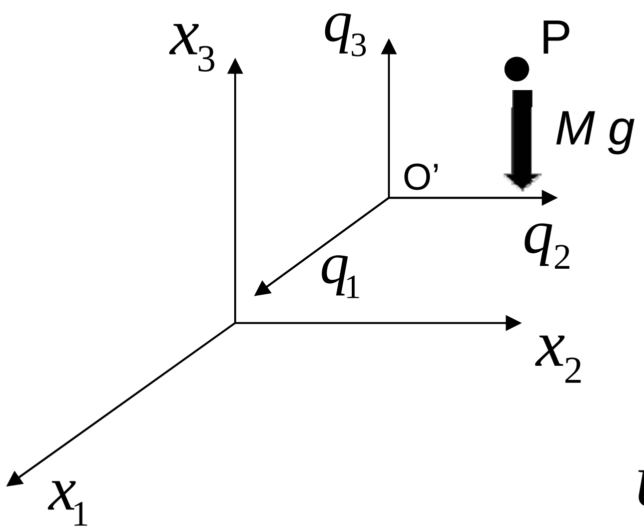
$$\Rightarrow \quad E = T + U = const$$

$$\Rightarrow \quad p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = M r^2 \dot{\phi} \sin^2\theta \, = const.$$

**3)**

Una partícula de masa M se mueve respecto de un triedro inercial sometida al peso.
Usar como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de un triedro que se mueve paralelamente al anterior y su origen (O’) se desplaza con una ley $\vec{r}_{O'}(t)$ arbitraria.






$$\vec{r}_{o'}(t) = x_{o'}(t)\vec{e}_1 + y_{o'}(t)\vec{e}_2 + z_{o'}(t)\vec{e}_3,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \dot{q}_1\vec{e}_1 + \dot{q}_2\vec{e}_2 + \dot{q}_3\vec{e}_3,$$

$$T = \tfrac{1}{2} M\,\vec{v}^{\,2} = \tfrac{1}{2} M(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'})^2 + \\ + \tfrac{1}{2} M\left((\dot{q}_1 + \dot{x}_{o'})^2 + (\dot{q}_2 + \dot{y}_{o'})^2\right),$$

$$U \equiv Mgx_3 = Mgq_3 + Mg\,z_{o'}(t), \qquad L = T - U,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M(\dot{q}_1 + \dot{x}_{o'}) = const = c_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M(\dot{q}_2 + \dot{y}_{o'}) = const = c_2,$$

No existe la ley de conservación $E(q,\dot{q})$ para $\vec{r}_{o'}(t)$ arbitrario!

$$\frac{d}{dt} M(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'}) + Mg = 0, \quad \Rightarrow \quad M(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'}) + Mg\,t = const$$

Equivalente a:

$$(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'})\frac{d}{dt} M(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'}) + Mg(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'}) = 0,$$

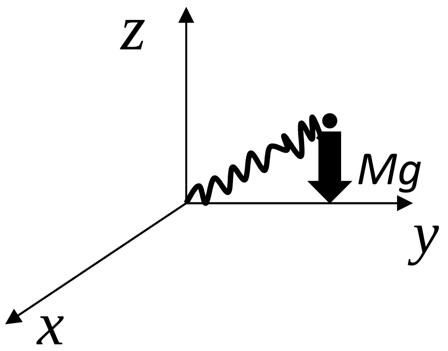
$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} M(\dot{q}_3 + \dot{z}_{o'})^2 + Mg(q_3 + z_{o'}) = const$$

**4)**

Una partícula de peso *Mg* se mueve en un triedro inercial *x,y,z* bajo la acción de la fuerza de un muelle ideal de constante elástica *K* y longitud natural despreciable. El vector velocidad de la partícula es paralelo en cada instante al vector

$$\vec{u}(t) = (2 + \sin \omega t)\vec{i} + (3 - \cos \omega t)\vec{j} + (4 + \sin \omega t)\vec{k},$$

siendo $\omega$ una constante conocida. Obtener las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento de la partícula.




$$L = T - U, \quad T = \tfrac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = Mgz + \tfrac{1}{2} K(x^2 + y^2 + z^2),$$

En las coordenadas x,y,z

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad B_1 = 0 \Longrightarrow E = T + U = const.$$

- a) Ejercicio.

Encontrar la curva plana $y(x)$ que une los puntos $(x_A, y_A)$ y $(x_B, y_B)$, teniendo la longitud más corta.

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx\,, \quad con \quad y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B,$$

$$F \equiv \sqrt{1 + y'(x)^2} \qquad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = const \quad \Rightarrow \quad y'(x) = const. \quad \Rightarrow \quad y = c_2 + c_1 x,$$

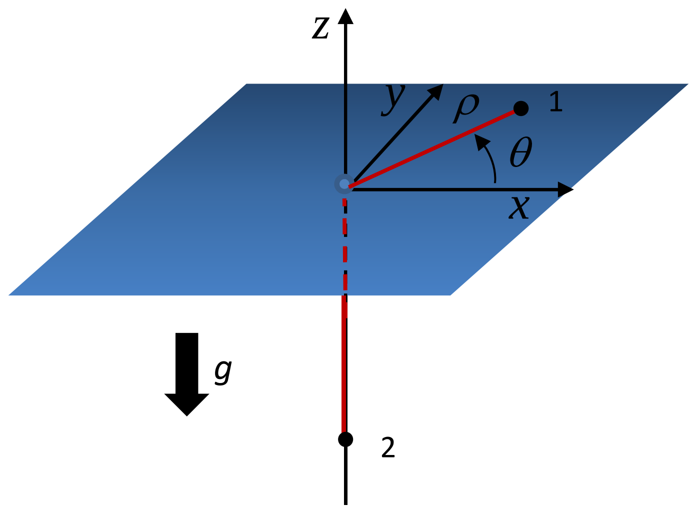
$$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_A - x_A\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x} \quad \Leftarrow$$

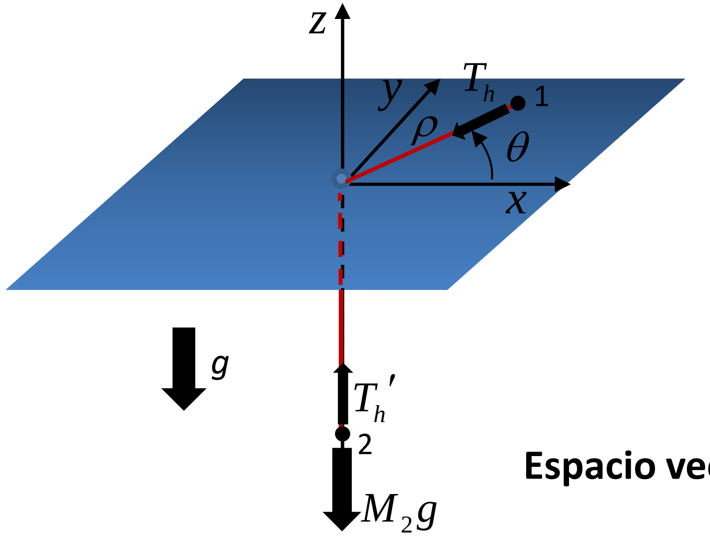
## 1) Ejercicio. Dinámica relativista.

Un electrón relativista se mueve en el seno de un potencial $U(\vec{r},t)$. La lagrangiana de dicha partícula es $L=-mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}-U(\vec{r},t)$, siendo $m$ y $c$ la masa del electrón y la velocidad de la luz en el vacío. Determinar a partir del Principio de Hamilton las ecuaciones del movimiento de dicha partícula.

**Ejemplo 1** (ejercicio nº2 de apuntes).

Dos partículas de masas $M_1$ y $M_2$ están unidas a través de un hilo ideal que pasa por un agujero taladrado en el plano horizontal (sin rozamiento) de la figura. Determinar: Variedad de configuración, fuerzas generalizadas, ecuaciones de Lagrange, etc.






Partícula 1: $(x, y)$  Partícula 2: $z$

**Espacio de config. Cartesiano:**

$$\{x^1, x^2, x^3\} \Rightarrow \{x, y, z\}$$

$$\{m_1, m_2, m_3\} \Rightarrow \{M_1, M_1, M_2\}; \quad m = M_1 + M_2;$$

**Espacio vect. de config:** $\vec{\tilde{e}}_1 = \{1,0,0\},\ \vec{\tilde{e}}_2 = \{0,1,0\},\ \vec{\tilde{e}}_3 = \{0,0,1\},$

$$\vec{e}_1 = \sqrt{\tfrac{M_1}{M_1+M_2}}\vec{\tilde{e}}_1;\ \vec{e}_2 = \sqrt{\tfrac{M_1}{M_1+M_2}}\vec{\tilde{e}}_2;\ \vec{e}_3 = \sqrt{\tfrac{M_2}{M_1+M_2}}\vec{\tilde{e}}_3; \quad \vec{e}^{\,1} = \sqrt{\tfrac{M_1+M_2}{M_1}}\vec{\tilde{e}}_1;\ \vec{e}^{\,2} = \sqrt{\tfrac{M_1+M_2}{M_1}}\vec{\tilde{e}}_2;\ \vec{e}^{\,3} = \sqrt{\tfrac{M_1+M_2}{M_2}}\vec{\tilde{e}}_3;$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3;\ \vec{f} = -M_2 g\vec{e}^{\,3} + \vec{f}_1^{\,CH} \equiv -T_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,1} - T_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,2} + (T_h' - M_2 g)\vec{e}^{\,3};$$

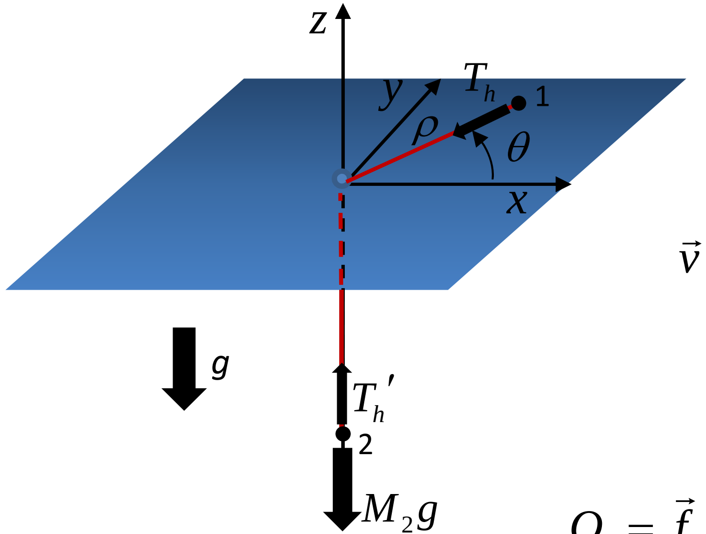
**Ecuación de ligadura:** $\phi_1 \equiv \sqrt{x^2+y^2} + |z| - \ell = \sqrt{x^2+y^2} - z - \ell = 0,$

$$\nabla\phi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,1} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,2}\sqrt{x^2+y^2} - \vec{e}^{\,3},$$

$$\vec{f}_1^{\,CH} \equiv -T_h\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,1} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}^{\,2} - \frac{T_h'}{T_h}\vec{e}^{\,3}\right);$$

**Ligadura ideal:**

$$\vec{f}_1^{\,CH} = \lambda_1 \nabla\phi_1; \quad \Rightarrow \quad T_h = T_h';$$




- **Coordenadas generalizadas:** $q = (x, y, z)$

(no usamos la ligadura en la parametrización de la variedad de configuración)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3; \quad T = \tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 = \tfrac{1}{2}M_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{2}M_2\dot{z}^2$$

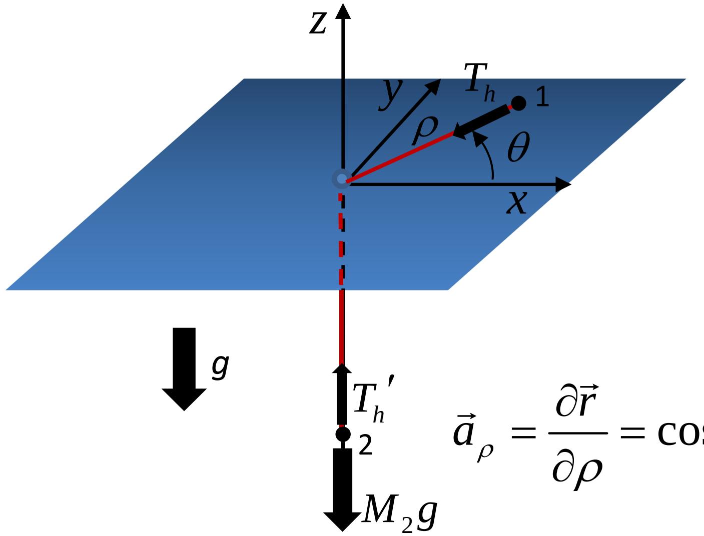
$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{e}_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_3,$$

$$Q_1 = \vec{f} \cdot \vec{e}_1 = -T_h \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \; Q_2 = \vec{f} \cdot \vec{e}_2 = -T_h \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$Q_3 = \vec{f} \cdot \vec{e}_3 = T_h - M_2 g;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_2, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_3,$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} M_1\ddot{x} &= -T_h \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ M_1\ddot{y} &= -T_h \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ M_2\ddot{z} &= T_h - M_2 g, \\ \phi_1 &\equiv \sqrt{x^2 + y^2} - z - \ell = 0, \end{aligned}\right\}$$




- **Coordenadas generalizadas:** $q=(\rho,\theta)$

(usamos la ligadura en la parametrización de la variedad de configuración!!!!)

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=\rho-\ell,$$

$$\vec r(\rho,\theta)=\rho(\cos\theta\,\vec e_1+\sin\theta\,\vec e_2)+(\rho-\ell)\vec e_3;$$

$$\vec a_\rho=\frac{\partial\vec r}{\partial\rho}=\cos\theta\vec e_1+\sin\theta\vec e_2+\vec e_3,\quad \vec a_\theta=\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}=\rho(-\sin\theta\vec e_1+\cos\theta\vec e_2),$$

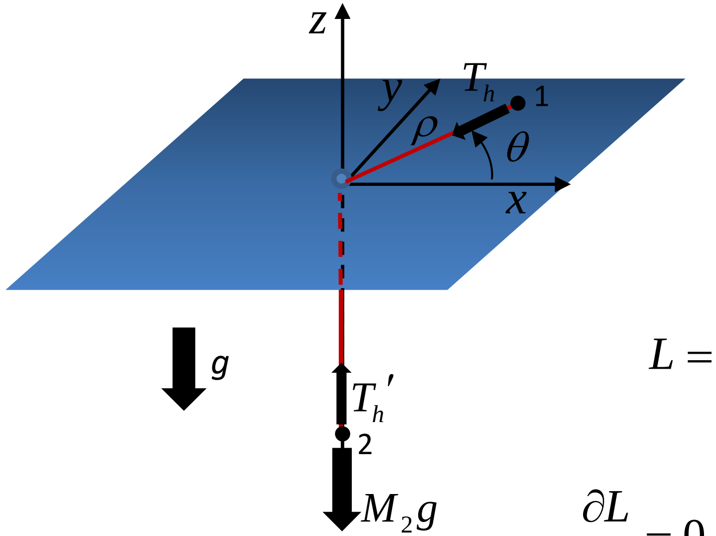
$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\dot\rho\vec a_\rho+\dot\theta\vec a_\theta,\qquad T=\tfrac{1}{2}m\vec v^2=\tfrac{1}{2}M_1(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2)+\tfrac{1}{2}M_2\dot\rho^2\equiv\tfrac{1}{2}(M_1+M_2)\dot\rho^2+\tfrac{1}{2}M_2\rho^2\dot\theta^2,$$

$$Q_\theta=\vec f\cdot\vec a_\theta=\left(-T_h\cos\theta\vec e^1-T_h\sin\theta\vec e^2+(T_h-M_2g)\vec e^3\right)\cdot\rho(-\sin\theta\vec e_1+\cos\theta\vec e_2)=0,$$

$$Q_\rho=\vec f\cdot\vec a_\rho=\vec f\cdot(\cos\theta\vec e_1+\sin\theta\vec e_2+\vec e_3)=-M_2g,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial T}{\partial\rho}=Q_\rho,$$

$$\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} M_2\dfrac{d(\rho^2\dot\theta)}{dt}=0,\\ (M_1+M_2)\ddot\rho-M_2\rho\dot\theta^2=-M_2g,\end{array}\right.$$




- **Obtened la lagrangiana usando leyes de conservación.** $q = (\rho, \theta)$

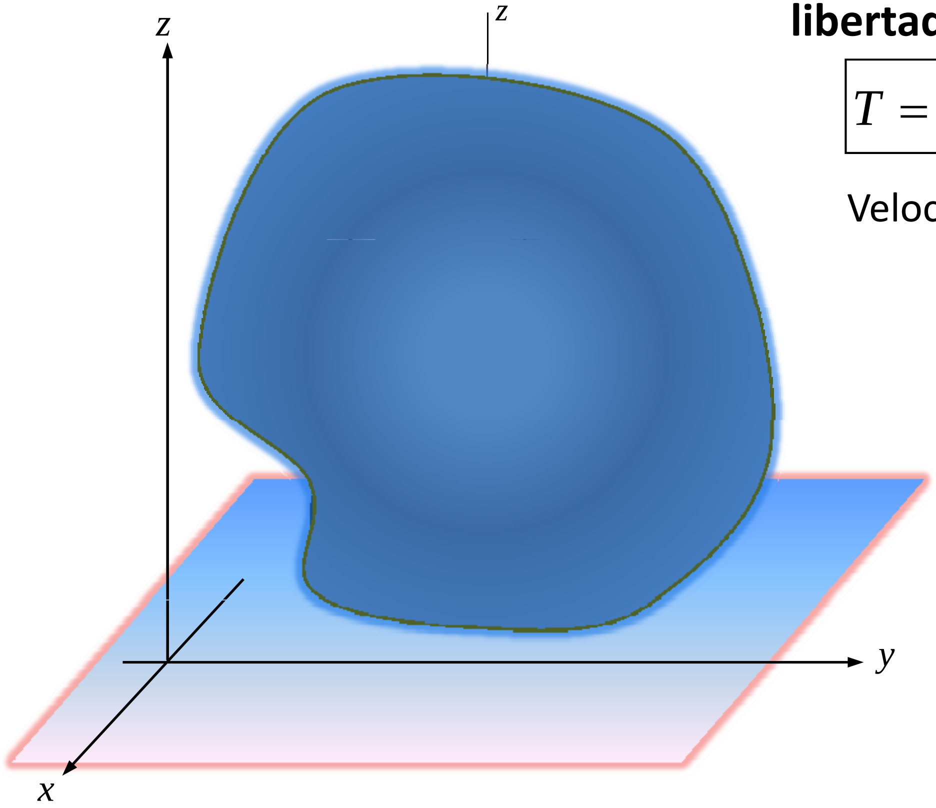
$$U = M_2 g\, z \equiv M_2 g(\rho - \ell),$$

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \rho^2 \dot{\theta}^2 - M_2 g(\rho - \ell)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(q,\dot{q}) = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\rho}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - L = T + U = const.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M_2 \rho^2 \dot{\theta} = const.$$

• **Sólido rígido:** Es un sistema partículas con seis grados de libertad (dimensión de la variedad de configuración) y como coordenadas generalizadas pueden usarse,por ejemplo, las tres coordenadas cartesianas, $(x_A, y_A, z_A)$, de un punto *A* del sólido junto con otros tres parámetros, $(\phi, \psi, \theta)$ , que determinan su orientación y que usualmente son los tres ángulos de Euler.




- Sólido **sin punto fijo (6 grados de libertad)**: *A=CM*

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} M (\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 + \dot{z}_{CM}^2) + \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}}_{CM} \cdot \vec{\omega},}$$

Velocidad angular: $$\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\vec{i}' + (\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{j}' + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{k}',$$

- Sólido **con punto fijo: conviene tomar** *A=punto fijo.*

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}}_A \cdot \vec{\omega},}$$

*Aplicación al sólido rígido (Sección I.1.8 de los apuntes, ver como ejemplo).*

## Componentes generalizadas de las fuerzas $Q_\alpha$

$$q_\alpha \equiv x_A, y_A, z_A, \theta, \phi, \psi.$$

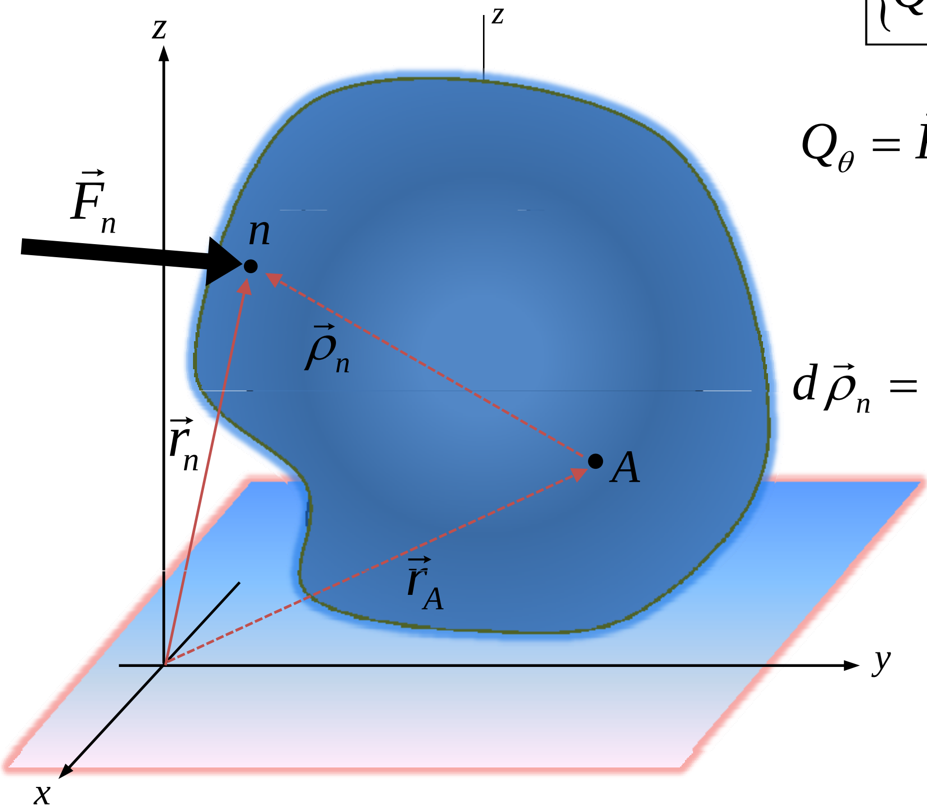
$$Q_\alpha = \vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha = \vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{r}_n}{\partial q_\alpha},$$

$$\vec{r}_n = \vec{r}_A + \vec{\rho}_n;$$

$$Q_\alpha = \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{r}_A}{\partial q_\alpha} + \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{\rho}_n}{\partial q_\alpha}.$$

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k};$$

$$\boxed{\left\{Q_{x_A}, Q_{y_A}, Q_{z_A}\right\} = \left\{(\vec{F}_n)_x, (\vec{F}_n)_y, (\vec{F}_n)_z\right\};}$$




$$Q_\theta = \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{\rho}_n}{\partial\theta},\quad Q_\phi = \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{\rho}_n}{\partial\phi},\quad Q_\psi = \vec{F}_n\cdot\frac{\partial\vec{\rho}_n}{\partial\psi},$$

$$Q_\theta d\theta + Q_\phi d\phi + Q_\psi d\psi = \vec{F}_n\cdot d\vec{\rho}_n$$

$$d\vec{\rho}_n = (\vec{\omega}\,dt)\times\vec{\rho}_n = (\vec{\Omega}_\theta d\theta + \vec{\Omega}_\phi d\phi + \vec{\Omega}_\psi d\psi)\times\vec{\rho}_n$$

$$\vec{\Omega}_\theta = \cos\psi\,\vec{i}' + \sin\psi\,\vec{j}',$$

$$\vec{\Omega}_\phi = \sin\theta\sin\psi\,\vec{i}' + \sin\theta\cos\psi\,\vec{j}' + \cos\theta\,\vec{k}',$$

$$\vec{\Omega}_\psi = \vec{k}',$$

**Componentes generalizadas de las fuerzas** $Q_\alpha$

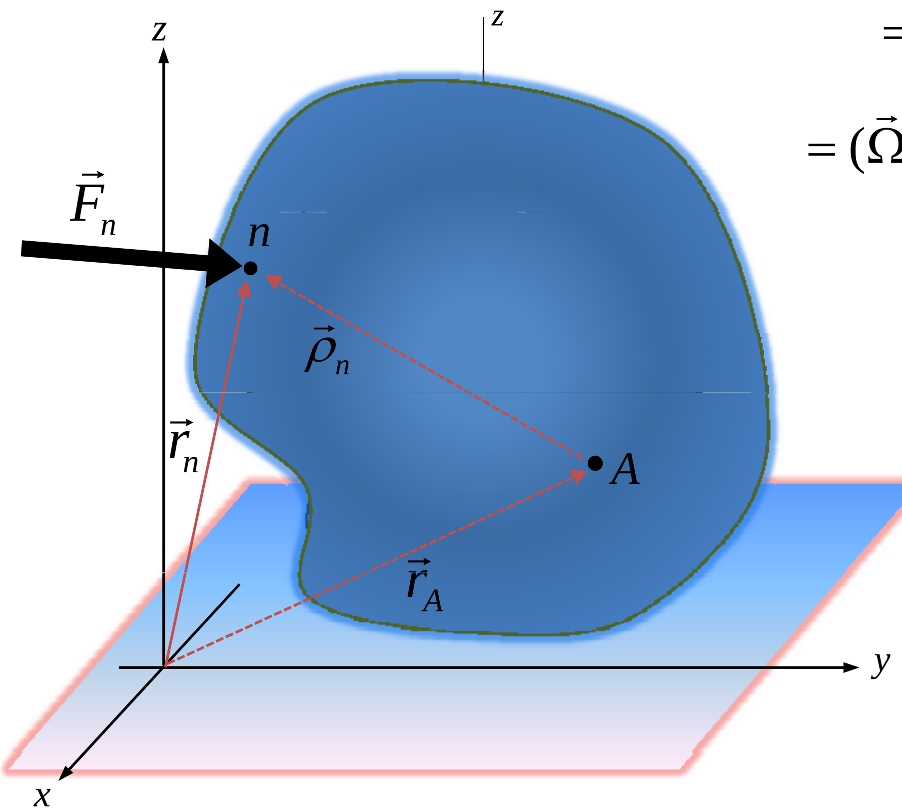
$$Q_\theta d\theta + Q_\phi d\phi + Q_\psi d\psi = \vec{F}_n \cdot d\vec{\rho}_n$$

$$= \vec{F}_n \cdot \left((\vec{\omega}dt) \times \vec{\rho}_n\right) = \left((\vec{\Omega}_\theta d\theta + \vec{\Omega}_\phi d\phi + \vec{\Omega}_\psi d\psi) \times \vec{\rho}_n\right) \cdot \vec{F}_n$$

$$= (\vec{\Omega}_\theta d\theta + \vec{\Omega}_\phi d\phi + \vec{\Omega}_\psi d\psi) \cdot \left(\vec{\rho}_n \times \vec{F}_n\right)$$

$$= (\vec{\Omega}_\theta d\theta + \vec{\Omega}_\phi d\phi + \vec{\Omega}_\psi d\psi) \cdot \vec{M}_A$$

$$= (\vec{\Omega}_\theta \cdot \vec{M}_A) d\theta + (\vec{\Omega}_\phi \cdot \vec{M}_A) d\phi + (\vec{\Omega}_\psi \cdot \vec{M}_A) d\psi;$$




$$Q_\theta = \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_\theta,$$

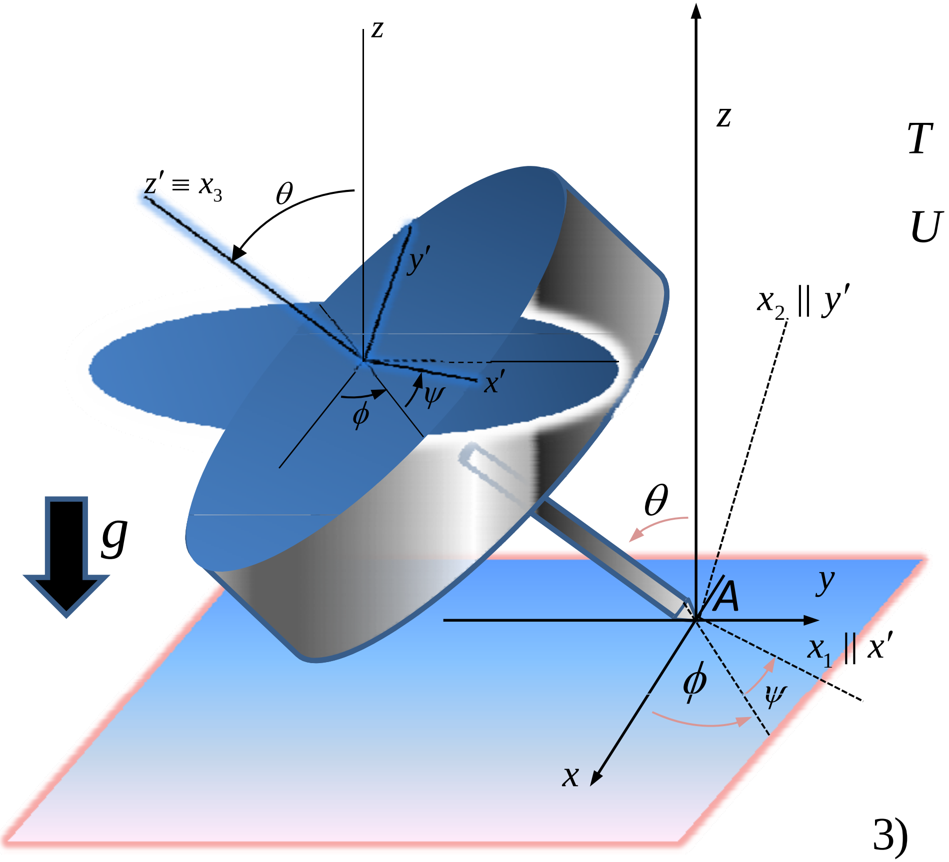
$$Q_\phi = \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_\phi,$$

$$Q_\psi = \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_\psi,$$

**1 Ejemplo**

Obtened la lagrangiana de la peonza simétrica y 3 leyes de conservación a partir de su lagrangiana.

$$T = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\overline{\overline{I}}_A\cdot\vec{\omega}, \quad \overline{\overline{I}}_A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix};$$




$$T = \tfrac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2,$$

$$U = Mgz = Mg\ell\cos\theta; \quad L = T - U.$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow$

$$E = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial \phi} + \dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial \psi} - L = T + U = cte.$$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \Rightarrow$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = cte$$

3) $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \Rightarrow p_\psi \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = cte$

# APLICACIÓN AL SÓLIDO RÍGIDO

(Ver Sección I.1.8)

SISTEMA CON 6 GRADOS DE LIBERTAD $(x_A\ ,\ y_A\ ,\ z_A\ )$ $(\phi,\psi,\theta\ )$

EN ESPACIO DE CONFIGURACIÓN 3*N* DIMENSIONAL

Sólido libre

$$\vec{r} = \vec{r}(x_A, y_A, z_A, \phi, \psi, \theta)$$

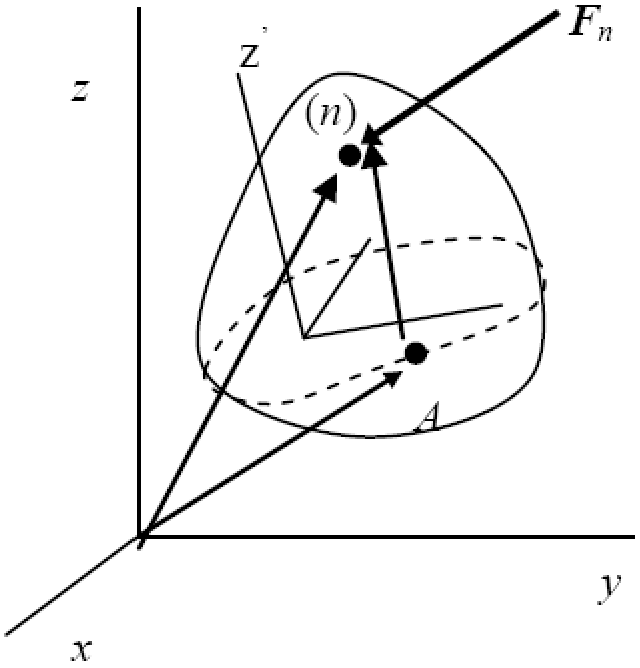
Sólido tiene un punto fijo

$$\vec{r} = \vec{r}(\phi, \psi, \theta)$$

LIGADURAS HOLÓNOMAS REDUCEN LOS PARÁMETROS < 6

Ecuaciones independientes de $\dot{q}$ $\Longrightarrow$ $f\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, t\right) = 0$

# FUERZAS GENERALIZADAS




Componente generalizada de la fuerza

$$Q_\alpha = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} \equiv \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_n \cdot \frac{\partial (\vec{r}_A + \vec{\rho}_n)}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_n}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\rho}\,'_n \quad , \quad ( q_\alpha = \phi \, , \psi \, , \theta \ ).$$

Matriz ortogonal

D $\Longrightarrow$ $(x', y', z') \rightarrow (x, y, z)$

$\vec{\rho}\,'_n$ Vector en componentes sobre ejes ligados al cuerpo

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \phi} \cdot \vec{\rho}\,'_n \, d\phi + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \psi} \cdot \vec{\rho}\,'_n \, d\psi + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \theta} \cdot \vec{\rho}\,'_n \, d\theta \equiv \vec{\omega} \, dt \wedge \vec{\rho}_n$$

$$Q_\phi d\phi + Q_\psi d\psi + Q_\theta d\theta = \vec{F}_n \cdot \vec{\omega}\, dt \wedge \vec{\rho}_n = (\vec{\rho}_n \wedge \vec{F}_n) \cdot \vec{\omega}\, dt \equiv \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}\, dt$$

$\vec{M}_A \Longrightarrow$ momento de la fuerza $\vec{F}_n$

Como $\vec{\omega}\, dt$ es lineal en $d\phi,\ d\psi\ \text{y}\ d\theta$

y con $Q_\phi d\phi + Q_\psi d\psi + Q_\theta d\theta = \vec{F}_n \cdot \vec{\omega}\, dt \wedge \vec{\rho}_n = (\vec{\rho}_n \wedge \vec{F}_n) \cdot \vec{\omega}\, dt \equiv \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}\, dt$

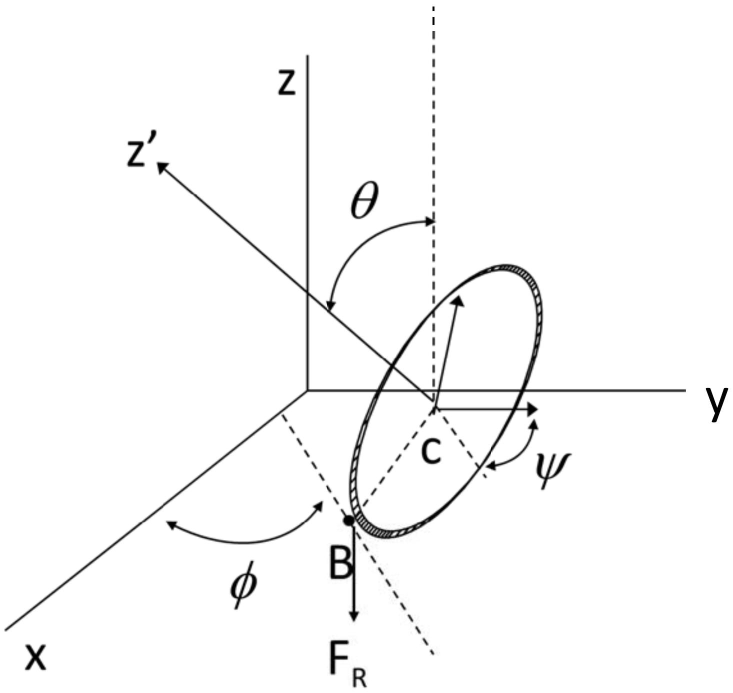
encontramos $\Downarrow$

$Q_\phi\ ,\ Q_\psi\ ,\text{y}\ \ Q_\theta$

Componentes generalizadas

$$Q_x = \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x_A} = \left(\vec{F}_n\right)_x \qquad Q_y = \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial y_A} = \left(\vec{F}_n\right)_y \qquad Q_z = \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial z_A} = \left(\vec{F}_n\right)_z$$

# DISCO RODANDO SIN DESLIZAR



# Disco rodando

La velocidad angular del disco $\vec{\omega}=\omega_{x'}\vec{i}'+\omega_{y'}\vec{j}'+\omega_{z'}\vec{k}'$

$$\omega_{y'}=\dot{\phi}sen\theta\cos\psi-\dot{\theta}\,sen\psi$$

$$\omega_{z'}=\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

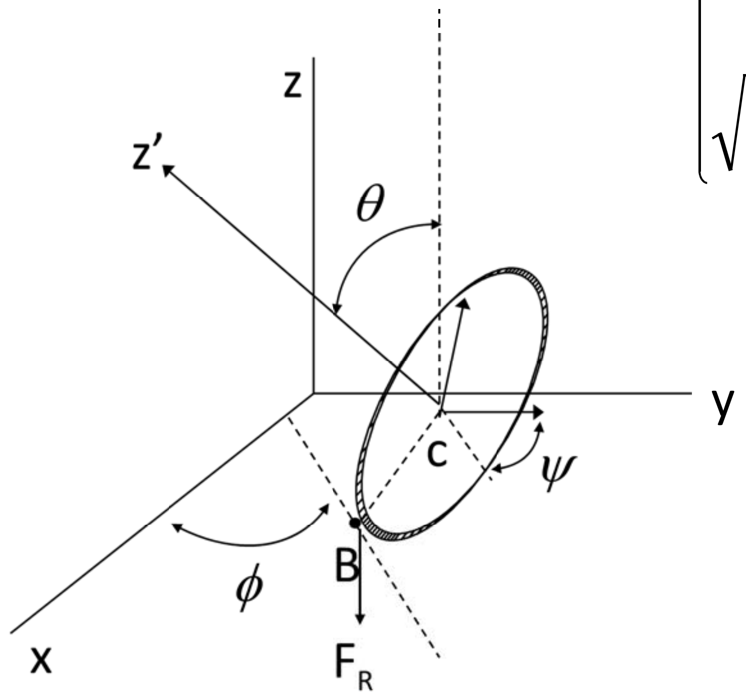
$$\omega_{x'}=\dot{\phi}\,sen\theta\,sen\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

La coordenada $z$ del centro de masas, $z_C=Rsen\theta$

El punto "B" del disco no desliza

$$\vec{v}_B=\vec{v}_C+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{CB}=0\ ,\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_C=Rsen\theta \\ \tan\phi=\dfrac{dy_B}{dx_B}\ \Rightarrow\ \dot{y}_B-\dot{x}_B\tan\phi=0 \\ \sqrt{dx_B{}^2+dy_B{}^2}-Rd\psi=0,\ \Rightarrow\ \dot{x}_B+R\dot{\psi}\cos\phi=0 \end{cases}$$




Usamos como coordenadas generalizadas:

$(\ x_B\ ,\ y_B\ ,\ \phi\ ,\ \psi\ ,\ \theta\ )$

*y las coordenadas del CM:*

$$x_C=x_B-R\cos\theta sen\phi$$

$$y_C=y_B+R\cos\theta\cos\phi$$

$$L = \frac{m}{2}\Big((\dot{x}_B - R\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi + R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)^2 + (\dot{y}_B - R\dot{\phi}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi)^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}mR^2\left[\omega_{x'}\ \omega_{y'}\ \omega_{z'}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'}\end{bmatrix} - mgRsen\theta$$

(Sistema de referencia unido al disco)

Considerando la Lagrangiana $L(x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \phi, \psi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$

$$\begin{cases} \dot{x}_B + R\dot{\psi}\cos\phi = 0\,, \qquad \dot{y}_B + R\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0 \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_B} - \dfrac{\partial L}{\partial x_B} = \mu_1\,, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_B} - \dfrac{\partial L}{\partial y_B} = \mu_2 \;, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \psi} = \mu_1 R\cos\phi + \mu_2 R\,\mathrm{sen}\,\phi \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad , \qquad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0\,. \end{cases}$$

Los multiplicadores $\mu_1$ y $\mu_2$ están relacionados con las componentes $F_{Rx}$ y $F_{Ry}$ de la fuerza de rozamiento.

Componentes generalizadas de la fuerza de ligadura no holónoma $R_y\,,\ \ R_\psi\,,\ \ldots\ldots,$

Expresando

$$\vec{r}_C = (x_B - R\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\vec{i} + (y_B + R\cos\theta\cos\phi)\vec{j} + R\operatorname{sen}\theta\vec{k}$$

$$R_x \equiv \mu_1 = \vec{F}_R \cdot \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial x_B} =$$

$$= \vec{F}_R \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_B}\left(\vec{r}_C + R\cos\psi(\cos\phi\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\vec{j}) + R\operatorname{sen}\psi\cos\theta(-\operatorname{sen}\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}) + R\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\vec{k}\right)\right)_{\psi=-\pi/2} = F_{Rx}$$

Para las otras componentes tenemos

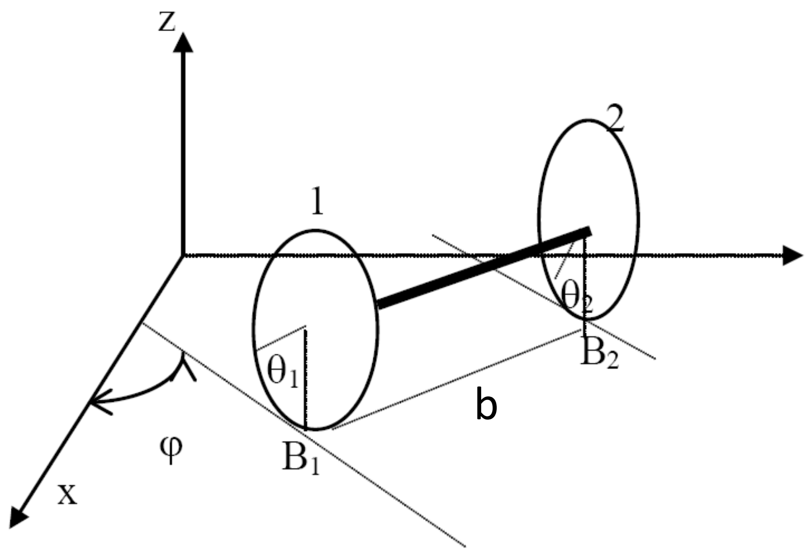
$$R_y \equiv \mu_2 = F_{Ry}$$

$$R_\psi = \mu_1 R\cos\phi + \mu_2 R\operatorname{sen}\phi$$

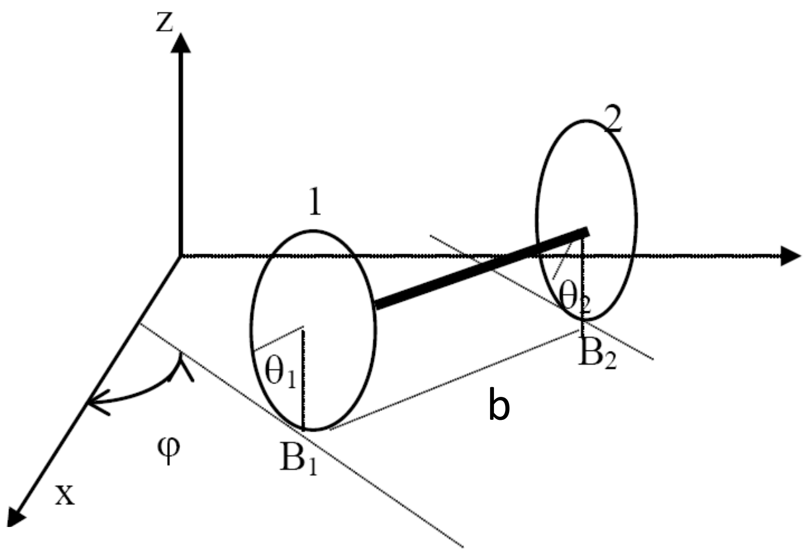
$$R_\phi = 0$$

$$R_\theta = 0$$

# Dos discos en un plano inclinado



Sean las coordenadas $\varphi, \ \theta_1, \ \theta_2, x_1, \ y_1$




No deslizamiento

$$\overline{v}_{B1} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 \cos\varphi = 0 \\ \dot{y}_1 - R\dot{\theta}_1 \, sen\,\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\overline{v}_{B2} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x_1 - b\, sen\,\varphi) - R\dot{\theta}_2 \cos\varphi = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(y_1 + b\cos\varphi) - R\dot{\theta}_2 \, sen\,\varphi = 0 \end{cases}$$

Ecuación de ligadura integrable:

$$b\dot{\varphi} + R\dot{\theta}_2 = R\dot{\theta}_1 \ \Rightarrow \ b(\varphi - \varphi_0) + R\theta_2 = R\theta_1$$

Con $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\,, \ \ \varphi(0) = \varphi_0$

Tomamos como coordenadas generalizadas $\varphi, \theta_1, x_1, y_1$

Con $b(\varphi-\varphi_0)+R\theta_2 = R\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \theta_1 - \frac{b}{R}(\varphi-\varphi_0)$

El potencial es

$$U = -2Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\, x_{CM} = -2Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(\frac{x_1 + x_1 - b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{2}\right) = -Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(2x_1 - b\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

El lagrangiano es

$$L(x_1, y_1, \theta_1, \varphi, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}) = T - U =$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{4}MR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) + \frac{1}{2}M\left[\left(\dot{x}_1 - b\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \left(\dot{y}_1 - b\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}MR^2\left((\dot{\theta}_1 - \frac{b}{R}\dot{\varphi})^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) + Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(2x_1 - b\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \mu_1 \,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = \mu_2 \,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\mu_1 R\cos\varphi - \mu_2 R \operatorname{sen}\varphi \,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \,, \\[2ex] \dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 \cos\varphi = 0 \,, \qquad \dot{y}_1 - R\dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\varphi = 0 \,, \end{cases}$$

Componentes generalizadas $R_{x1}, R_{y1}, R_{\theta 1}, R_{\varphi}$

$$R_{x1} \equiv \mu_1 = \vec{F}_{R1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B1}}{\partial x_1} + \vec{F}_{R2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B2}}{\partial x_1} =$$

$$= \vec{F}_{R1} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + R\vec{k} - R \operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi \vec{i} - R \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi \vec{ij} + R(1-\cos\theta_1)\vec{k}) \right)_{\theta 1=0} +$$

$$+ \vec{F}_{R2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + R\vec{k} - R \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi \vec{i} - R \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi \vec{j} + R(1-\cos\theta_2)\vec{k}) \right)_{\theta 2=0} = F_{Rx1} + F_{Rx2}$$

$$R_{y1} \equiv \mu_2 = \vec{F}_{R1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B1}}{\partial y_1} + \vec{F}_{R2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B2}}{\partial y_1} = F_{Ry1} + F_{Ry2}$$

$$R_{\theta 1} \equiv -\mu_1 R \cos\varphi - \mu_2 R \operatorname{sen}\varphi = \vec{F}_{R1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B1}}{\partial \theta_1} + \vec{F}_{R2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B2}}{\partial \theta_1}$$

$$= -F_{Rx1} R \cos\varphi - F_{Ry1} R \operatorname{sen}\varphi - F_{Rx2} R \cos\varphi - F_{Ry2} R \operatorname{sen}\varphi$$

$$R_\varphi \equiv 0 = \vec{F}_{R1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B1}}{\partial \varphi} + \vec{F}_{R2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B2}}{\partial \varphi}$$

$$= -F_{Rx2} b \cos\varphi - F_{Ry2} b \,\mathrm{sen}\,\varphi + R F_{Rx2} \frac{b}{R} \cos\varphi + R F_{Ry2} \frac{b}{R} \,\mathrm{sen}\,\varphi \equiv 0$$

Para obtener todas las componentes de la fuerza de rozamiento

Se utiliza la ligadura $b\dot{\varphi} + R\dot{\theta}_2 - R\dot{\theta}_1 = 0$ como ligadura cinemática no integrable

añadiendo un multiplicador más

$$\Rightarrow \quad L(x_1, y_1, \theta_1, \theta_2, \varphi, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi})$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \mu_1 \,, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = \mu_2 \,, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\mu_1 R\cos\varphi - \mu_2 R\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mu_3 R \,, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = \mu_3 R \,, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = \mu_3 b \,, \\[2ex]
\dot{x}_1 - R\dot{\theta}_1 \cos\varphi = 0 \,, \qquad \dot{y}_1 - R\dot{\theta}_1\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \,, \qquad b\dot{\varphi} + R\dot{\theta}_2 - R\dot{\theta}_1 = 0
\end{cases}
$$

Encontrando los multiplicadores

$$\mu_1 = F_{Rx1} + F_{Rx2} \text{ y } \quad \mu_2 = F_{Ry1} + F_{Ry2}$$

$$R_\varphi = \vec{F}_{R1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B1}}{\partial \varphi} + \vec{F}_{R2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{B2}}{\partial \varphi} = -b(F_{Rx2} \cos\varphi + F_{Ry2} \operatorname{sen}\varphi) \equiv \mu_3 b$$

y las componentes físicas de las fuerzas de rozamiento
(proyecciones sobre el plano de las ruedas)

$$F_{T1} = F_{Rx1} \cos\varphi + F_{Ry1} \operatorname{sen}\varphi \text{ y } \; F_{T2} = F_{Rx2} \cos\varphi + F_{Ry2} \operatorname{sen}\varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \cos\varphi + \mu_2 \operatorname{sen}\varphi = F_{T1} + F_{T2} \\ \\ \mu_3 = -F_{T2}, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F_{T1} = \mu_1 \cos\varphi + \mu_2 \operatorname{sen}\varphi + \mu_3 \\ \\ F_{T2} = -\mu_3, \end{array}$$

¿Qué pasaría si la barra tuviera una masa no despreciable?

# FUERZAS DE INERCIA

$$\vec{v} = d\vec{r}\,/\,dt$$

Potencial generalizado $$U = -m\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) - m\frac{1}{2}(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})^2 + m\,\vec{a}_o'\cdot\vec{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} = -m(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -m(\vec{v}\wedge\vec{\Omega}) - m(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})\wedge\vec{\Omega} + m\vec{a}_0'$$

Fuerza de inercia $$\vec{F}_I = -m\,\vec{a}_o' + m(\vec{v}\wedge\vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})\wedge\vec{\Omega} + \frac{d}{dt}(-m(\vec{\Omega}\wedge\vec{r})) =$$

$$= -m(\vec{a}_o' + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{r} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v})$$

aceleración del origen

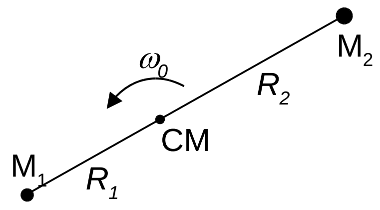
centrípeta

tangencial

Coriolis

# PROBLEMA DE 3 CUERPOS

• La lagrangiana de la partícula de masa *m*.




$$M_1\omega_0^2 R_1 = \frac{GM_1M_2}{\left(R_1+R_2\right)^2} = M_2\omega_0^2 R_2$$

$$\mu \equiv \frac{M_2}{M_1}$$

$$R_1 = \mu R_2$$

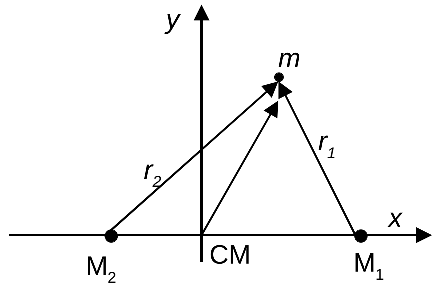
$$\omega_0^2 = \frac{GM_1}{R_2^3\left(1+\mu\right)^2}$$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\overline{v}\cdot\left(\overline{\omega}\wedge\overline{r}\right) + \frac{1}{2}m\left(\overline{\omega}\wedge\overline{r}\right)^2 + Gm\left(\frac{M_1}{r_1}+\frac{M_2}{r_2}\right)$$

Leyes de conservación

$$\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0 \;\Rightarrow\; \sum \frac{\partial L}{\partial \overline{v}} \cdot \overline{v} - L = cte \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \left( \overline{\omega} \wedge \overline{r} \right)^2 - Gm \left( \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right) = cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\overline{v} + m\left( \overline{\omega} \wedge \overline{r} \right)$$




$$\frac{\partial L}{\partial \overline{r}} = \nabla \left[ m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \frac{1}{2} m \left( \overline{\omega} \wedge \overline{r} \right)^2 + Gm \left( \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right) \right]$$

Ecuaciones de Lagrange

adimensionalizaciones: $\omega_0 t \to t$ ; $\overline{r}/(R_1+R_2) \to \overline{r}$

$$\frac{d}{dt}\left[m\overline{v}+m\left(\overline{\omega}\wedge\overline{r}\right)\right]-\frac{\partial L}{\partial \overline{r}}=0$$

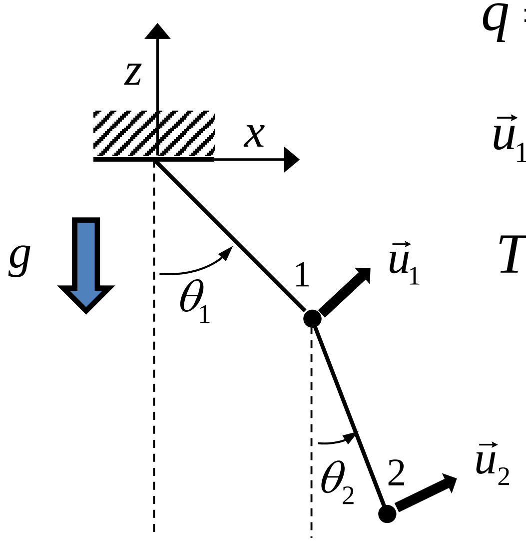
$$\begin{cases} \ddot{x}-2\dot{y}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{1+\mu}\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{\mu}{\rho_2}\right)\right]=0 \\ \ddot{y}+2\dot{x}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{1+\mu}\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{\mu}{\rho_2}\right)\right]=0 \end{cases}$$

donde

$$\rho_1 \equiv \frac{r_1}{R_1+R_2}=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2}$$

$$\rho_2 \equiv \frac{r_2}{R_1+R_2}=\sqrt{y^2+\left(x+\frac{1}{1+\mu}\right)^2}$$

**Ejercicio (péndulo doble de masas iguales, caso particular del problema 6)**
las ecuaciones de Lagrange y una ley de conservación




$$q = \theta_1, \theta_2,\ T = \frac{M}{2}\left(\vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2}\right),\ \vec{v}_1^{\,2} = \ell^2\dot{\theta}_1^2,\ \vec{v}_2 = \ell\,\dot{\theta}_1\vec{u}_1 + \ell\,\dot{\theta}_2\vec{u}_2,$$

$$\vec{u}_1 = \cos\theta_1\vec{i} + \sin\theta_1\vec{k},\quad \vec{u}_2 = \cos\theta_2\vec{i} + \sin\theta_2\vec{k},$$

$$T = \frac{M\ell^2}{2}\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right),$$

$$U = Mg(z_1 + z_2) = -Mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

$$L = T - U;$$

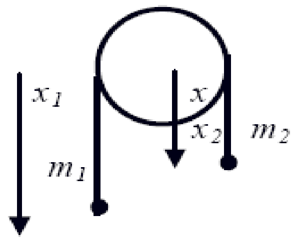
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2g\sin\theta_1 + \ell\,\dot{\theta}_2^{\,2}\sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\ell\,\ddot{\theta}_1 + \ell\,\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\ g\sin\theta_2 + \ell\,\dot{\theta}_1^{\,2}\sin(\theta_2 - \theta_1) + \ell\,\ddot{\theta}_2 + \ell\,\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0 \end{cases}$$

$$T + U = const$$

## Ejm. Problemas. 1: *La tensión es el multiplicador de Lagrange*




$$\phi = x_1 + x_2 + cte = 0 \,, \qquad \vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \,,$$

variedad de configuración $\vec{r}(x_1) = x_1\vec{e}_1 + (cte - x_1)\vec{e}_2$ ,

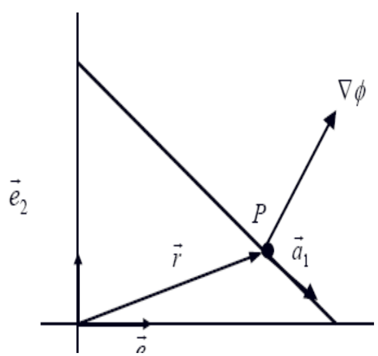
$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad , \qquad \vec{f} = (m_1 g - T_h)\vec{e}^{\,1} + (m_2 g - T_h)\vec{e}^{\,2} \quad ,$$

$$\left|\vec{e}_1\right| = (m_1/m)^{1/2} \quad , \qquad \left|\vec{e}_2\right| = (m_2/m)^{1/2} \quad , \qquad m = m_1 + m_2$$

$$\nabla\phi = \vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2} \,, \qquad \vec{f}^{\,CH} = -T_h(\vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2}) = -T_h \nabla\phi \quad , \Rightarrow \qquad \vec{f}^{\,CH}\cdot\vec{a}_1 = -T_h(\vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2})\cdot(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \equiv 0$$

$$\vec{v} = \dot{x}_1\vec{a}_1 \,, \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 \quad ,$$

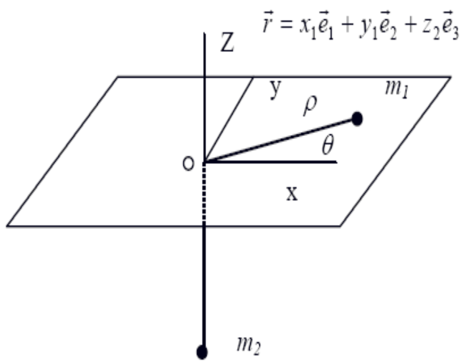
$$Q_1 = \vec{f}\cdot\vec{a}_1 = (m_1 g\,\vec{e}^{\,1} + m_2 g\,\vec{e}^{\,2})\cdot(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (m_1 - m_2)g$$




$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1 \;, \qquad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g \,.$$

Si no se proyecta sobre al variedad de configuración, entonces $\vec{a}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} = \vec{e}_1 ,\quad \vec{a}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = \vec{e}_2$

$$Q_1 = \vec{f}\cdot\vec{a}_1 = m_1 g - T_h \,, \qquad Q_2 = \vec{f}\cdot\vec{a}_2 = m_2 g - T_h \,, \qquad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad .$$



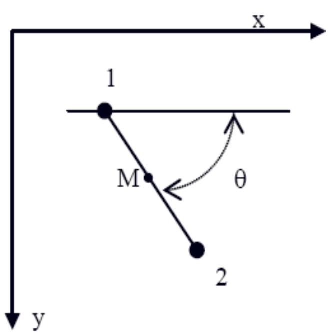

$$\text{ligadura} \; : \; \phi = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - z_2 - L \equiv \rho - z_2 - L = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\rho} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho \;, \qquad \Rightarrow \qquad (m_1 + m_2)\ddot\rho - m_1\,\rho\,\dot\theta^2 = -m_2 g$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \;, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(m_1\,\rho^2\dot\theta) = 0 \;,$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + \frac{1}{2}m_2\dot z_2^2,$$

$$\begin{cases} m_1\ddot\rho - m_1\,\rho\,\dot\theta^2 = -T_h\,, \\ m_2\ddot z_2 = T_h - m_2 g \;, \\ \phi = \rho - z_2 - L = 0 \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}(m_1\,\rho^2\dot\theta) = 0\,.$$




$$\text{ligadura:} \; \dot x\, sen\,\theta - \dot y\, cos\,\theta = 0\,, \quad (B_{11}\dot x + B_{12}\dot y + B_{13}\dot\theta + B_1 = 0),$$

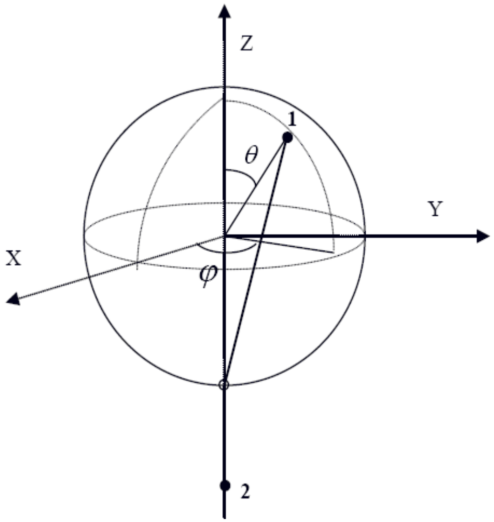
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = \mu_1 B_{1x}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot y} - \frac{\partial T}{\partial y} = 2m_0 g\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_1 B_{1y}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mu_1 B_{1\theta}\,,$$

$$\dot x\, sen\,\theta - \dot y\, cos\,\theta = 0\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0\ddot x = \mu_1\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \\ 2m_0\ddot y = 2m_0 g\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_1\cos\theta \\ 2m_0 L^2\ddot\theta = 0\,, \\ \dot x\, sen\,\theta - \dot y\, cos\,\theta = 0\,, \end{cases}$$




$$\vec{r}(\theta,\varphi) = Rsen\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + Rsen\theta sen\varphi\,\vec{e}_2 + R\cos\theta\,\vec{e}_3 + 2R(\cos(\theta/2)-3/2)\,\vec{e}_4$$

$$T(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,(\dot{\varphi}\,\vec{a}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{a}_\theta)\cdot(\dot{\varphi}\,\vec{a}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{a}_\theta) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$z_2 = \quad 2R(\cos(\theta/2)-3/2)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1R^2(\dot{\theta}^2 + sen^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2R^2 sen^2(\theta/2)\dot{\theta}^2\,, \qquad U = m_1 gR\cos\theta + m_2 g2R(\cos(\theta/2)-3/2)$$

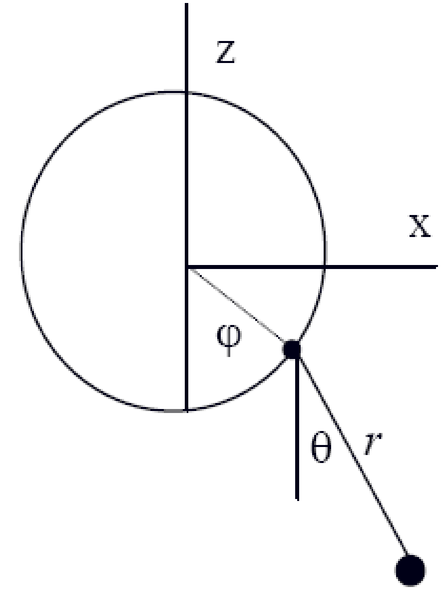
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - 0 = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_1R^2 sen^2\theta\,\dot{\varphi} = cte$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; T + U = cte\,.$$

**5)**

$$\dot{\varphi} = \omega = At + B \ , \quad \varphi = \frac{At^2}{2} + Bt \ , \ (\varphi(0) = 0 \ ) .$$

$\theta, r$ coordenadas generalizadas.




$$x = R\operatorname{sen}\varphi + r\operatorname{sen}\theta \ , \quad z = -R\cos\varphi - r\cos\theta \ .$$

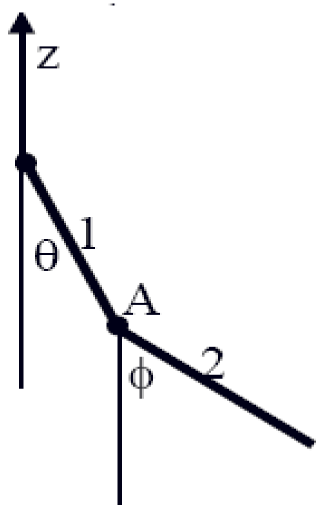
en donde $\varphi$ es una función explícita del tiempo.

$$T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m((R\omega\cos\varphi + \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 +$$

$$+ (R\omega\operatorname{sen}\varphi - \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2) \ ,$$

$$U(r,\theta,t) = \frac{1}{2}kr^2 - mg(R\cos\varphi + r\cos\theta) \ ,$$

**6)**




Sean $\theta$ y $\phi$ coordenadas generalizadas.

$$T = \frac{1}{6}m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2 l_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{M2}^2 \ ,$$

$$\overline{v}_{M2} = l_1 \dot{\theta}\, \overline{u}_\theta + \frac{l_2}{2}\dot{\phi}\, \overline{u}_\phi \quad .$$

$$v_M^2 = l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\phi}^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi}\, cos(\phi - \theta) \ ,$$

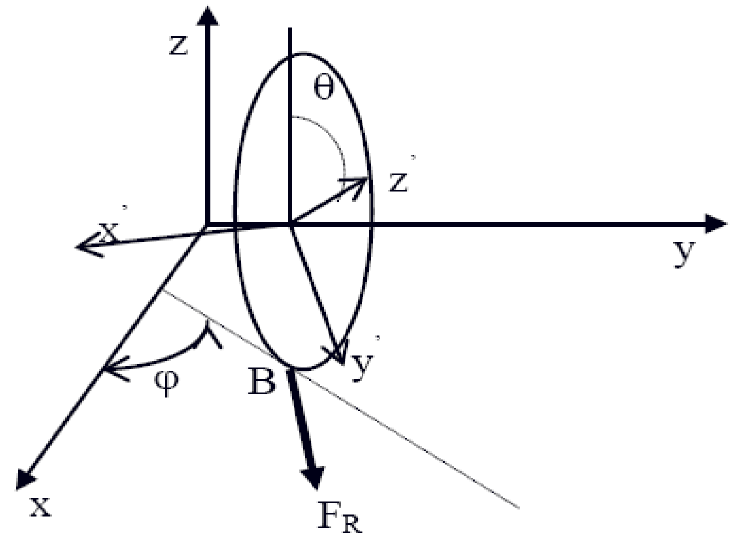
$$U = -m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\theta - m_2 g(l_1\cos\theta + \frac{l_2}{2}\cos\phi) \ ,$$

**10)**

Coordenadas generalizadas: $(x, y)$ del CM y $\theta$, $\varphi$. $\qquad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{i}\,' + \dot{\varphi}\,\vec{k}$ ,

$$\vec{v}_B = \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) + \vec{\omega} \wedge CB =$$

$$= \left(\dot{x} - R\dot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{i} + \left(\dot{y} - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\vec{j} = 0$$




Ecuaciones de ligadura no holónoma:

$$\dot{x} - R\dot{\theta}\cos\varphi = 0 \;, \qquad \dot{y} - R\dot{\theta}\,sen\,\varphi = 0 \,.$$

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\dot{\theta}, -\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{\varphi}\cos\theta\right) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{4}MR^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = \sum\limits_{\beta} \mu_\beta B_{\beta x} = \mu_1 \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y} = \sum\limits_{\beta} \mu_\beta B_{\beta y} = \mu_2 \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = \sum \mu_\beta B_{\beta\theta} = -\mu_1 R\cos\varphi - \mu_2 R\,\mathrm{sen}\,\varphi \;, \qquad \text{(incógnitas: } x\,,\ y\,,\ \theta\,,\ \varphi\,,\ \mu_1,\ \mu_2\text{)} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum \mu_\beta B_{\beta\varphi} \equiv 0 \;, \\ \dot{x} - R\dot{\theta}\,cos\,\varphi = 0 \;, \\ \dot{y} - R\dot{\theta}\,sen\,\varphi = 0 \;, \end{array} \right.$$