MECÁNICA ANALÍTICA

Profesor: José Manuel Donoso

Dto. Física Aplicada.

Material: Apuntes ETSIA de la asignatura (Prof. Javier Sanz)

Calificación: Examen Final (convocatoria oficial según ordenación)

Dos problemas (10+10) sin libros ni apuntes

Opción de *test teórico* a mediados de cuatrimestre

MECÁNICA ANALÍTICA 2011-12

- **Introducción a la Mecánica Lagrangiana**.
  - Ecuaciones de Lagrange. Antecedentes: Simetrías y Teoremas de Conservación. Principios variacionales..
    - Sistemas holónomos; ecuaciones de Lagrange. Potenciales generalizados; fuerzas. Sistemas lagrangianos.
    - Sistemas no holónomos; ecuaciones de Lagrange. Constantes del movimiento. Principios variacionales.

- **Introducción a la Mecánica Hamiltoniana**:
  - Ecuaciones de Hamilton; constantes del movimiento. Transformaciones canónicas.
  - Teoría de Hamilton-Jacobi. Sistemas integrables. Variables angulares y de acción.

- **Sistemas dinámicos**:
  - Equilibrio de un sistema dinámico. Linealización de un sistema dinámico. Ampliación del concepto de equilibrio; Noción de caos clásico.
  - Sistemas dinámicos discretos. Resonancia paramétrica. Oscilaciones anarmónicas de un grado de libertad.

- **Oscilaciones de N grados de libertad**:
  - Oscilaciones próximas a la posición de equilibrio;
  - Llinealización y modos normales de oscilación. Oscilaciones en torno al movimiento estacionario.

<u>**BIBLIOGRAFÍA BÁSICA RECOMENDADA**</u>

Arnold, V.I., *Mecánica Clásica*. Madrid 1983. Paraninfo.
Calkin, M.G, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. 1996. World Scientific.
Goldstein, H., *Mecánica Clásica*. Barcelona 1994. EDITORIAL REVERTE.
Hand, L. Y Finch J., *Analytical Mechanics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1998.
Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., *Mecánica*. Barcelona 1970. EDITORIAL REVERTE.

En cada tema podrán darse referencias específicas a textos o a artículos científicos relacionados con el temario que sean accesibles desde la web ETSIA-Biblioteca.

Introducción

- Mecánica de Newton. Leyes de conservación.

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$ $\vec{F} = 0$, entonces, $\vec{p}$ es una constante de movimiento

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$.

- Conservación del momento cinético.
- Conservación de la energía mecánica (fuerzas conservativas) $W_{12} = -\int_1^2 \vec{\nabla} V \, d\vec{s}$ $T_1 + V_2 = T_2 + V_2$
- ¿Qué tienen en común?

4

Formulación variacional de la Mecánica:

Principio de Hamilton

Cálculo de variaciones. Principios Variacionales

- Problema: extensión del proceso de minimizar (maximizar) una función f(x) a minimizar (maximizar) un FUNCIONAL, integral definida sobre x de una función de f(x), df/dx y de x.

- Del mismo modo que en cálculo ordinario se busca x para que f(x) sea extremo analizando el entorno de x:

- Una función (continuous and diferenciable) de n variables presenta un extremo en x_m si para toda variación infinitesimal δx en torno al punto es nula:

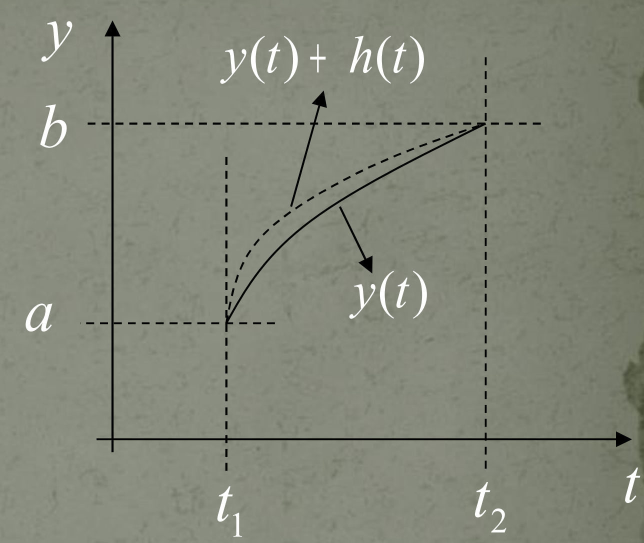
$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad x = x_m \equiv x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm},$$

$$\delta z \equiv z - F(x_m) \simeq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m \delta x_j = 0, \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

• **Valor estacionario de un funcional**

Consideremos la integral definida de la forma:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt \quad ,$$



Donde y es función de t e $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

I tiene valor que depende de la function $y(t)$ usada para evaluar la integral, I Se llama funcional de

• Si se busca ahora la función $y(t)$ que cumpla $y(t_1) = a, \; y(t_2) = b$

y que haga estacionario el funcional I ,

$$\delta I = I(y+h) - I(y) = 0 \quad \rightarrow$$

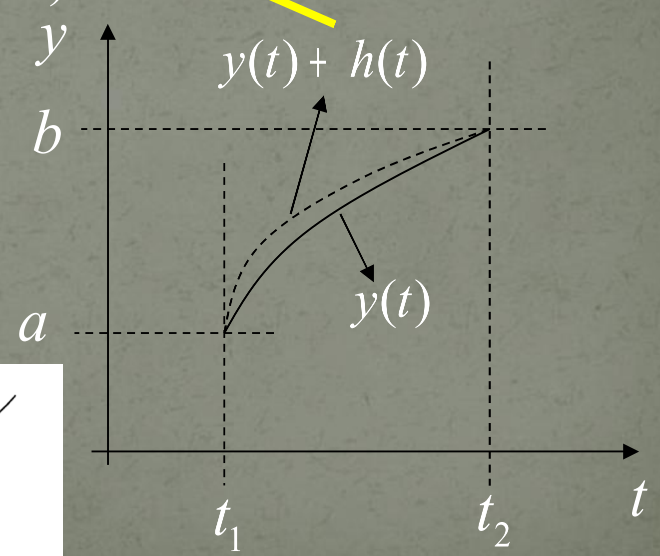
$$\to = \int_{t_1}^{t_2} F(y+h,\dot{y}+\dot{h},t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt \simeq$$

$$\simeq \int_{t_1}^{t_2}\left(\cancel{F} + F_y h + F_{\dot{y}}\dot{h}\right)dt - \cancel{\int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt} = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_y h + F_{\dot{y}}\dot{h}\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_y h\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{\dot{y}}\,dh = \int_{t_1}^{t_2} F_y h\,dt + \cancel{F_{\dot{y}} h\Big|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} h\frac{dF_{\dot{y}}}{dt}\,dt =$$

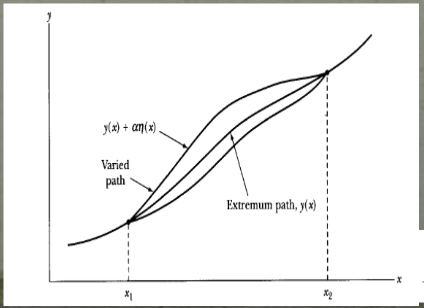
h

$$(h(t_1) = h(t_2) = 0)$$



$$\boxed{= -\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) h\,dt = 0,}$$

También suele tomarse *h* con variación paramétrica



$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x)$$

• Y como $h(t)$ es arbitrario, la integral es cero si (es suficiente y también necesario)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

La función $y(t)$ que satisface tal l ecuación se dice extremo del funcional I .

• **Para n variables la generalización es inmediata:**

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(y_1,\dots,y_n,\dot{y}_1\dots,\dot{y}_n,t)dt \quad , \qquad y_j(t_1) = a_j,\ y_j(t_2) = b_j, \quad j = 1,\dots,n.$$

$$\delta I = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Las funciones $y_j(t)$ son los extremos (estacionarios) del funcional I.

- Ejemplo.Encontrar la curva que minimiza la distancia entre dos puntos
- Hallar $y(x)$ tal que la distancia entre los puntos (x_A, y_A) y (x_B, y_B) sea mínima

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \,, \quad with \quad y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B,$$

$$F \equiv \sqrt{1 + y'(x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \text{cte}, \qquad \Rightarrow \quad y = c_2 + c_1 x,$$

$$\boxed{y = y_A - x_A \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) x}$$

El Principio de Hamilton

•**Para un sistema mecánico existe una función** $L(q,\dot{q},t)$ **de las posiciones** q **y velocidades** $\dot{q}$ **y del tiempo**

llamada lagrangiana , tal que el funcional S **, llamado "acción"**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)dt \quad ,$$

Es tal que sus extremos son las soluciones de las ecuaciones (de Lagrange) :

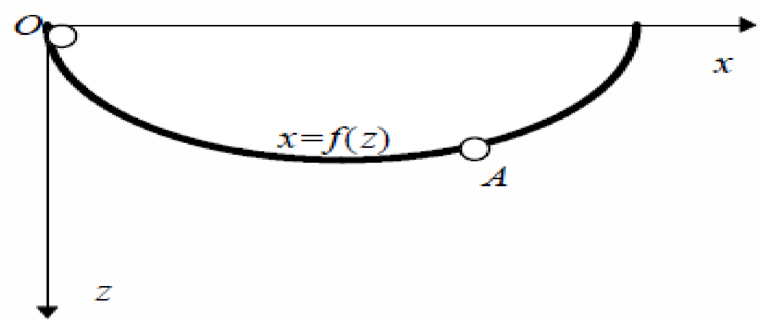
$$\delta S = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

¿Cuál es *L*? ¿es única? ¿pueden obtenerse las ecuaciones de Newton?

$$Ejm \quad L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U \qquad con \quad U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}|_i)$$

Problema de la braquistócrona (Problema 15) :

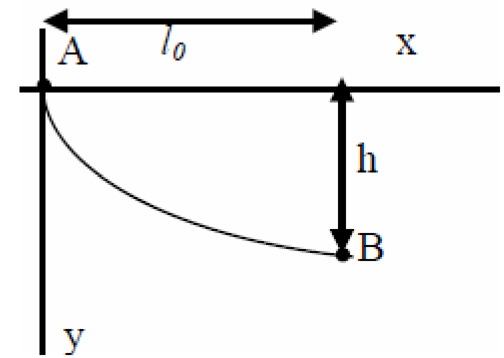
Dados dos puntos *O* y *A* en un plano vertical, y en presencia de un campo gravitacional vertical, hallar la curva que los une para que una partícula, que la recorra, tarde el mínimo tiempo posible en ir de un punto a otro, partiendo del reposo.



minimizar la integral

$$t = \int_O^A \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

$$t_{AB}=\int_A^B\frac{ds}{v}=\int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1+\dot y^2}{2g\,y}}\,dx \quad ,$$



La función integrando no depende explícitamente de x por lo que

$$\dot y\frac{\partial}{\partial \dot y}\sqrt{\frac{1+\dot y^2}{y}}-\sqrt{\frac{1+\dot y^2}{y}}=cte\,,\quad \Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot y^2)}}=cte=c\,,$$

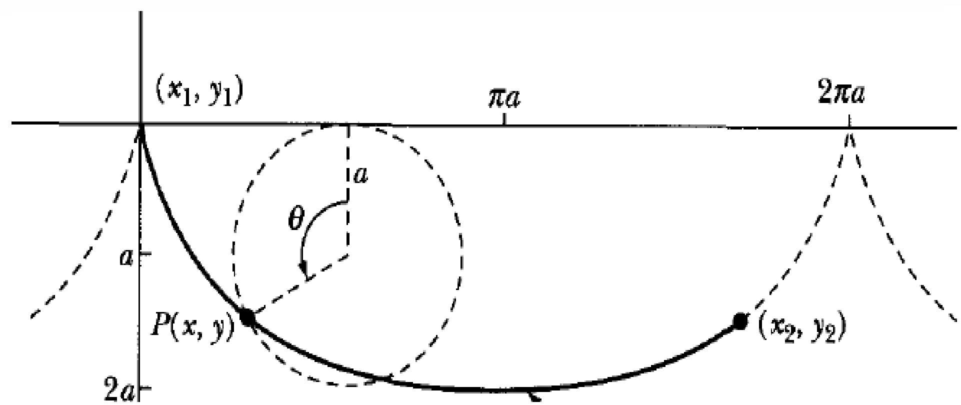
introduciendo el parámetro θ $\quad \dot y=\cot(\theta/2)$

$$y=c_1(1-\cos(\theta))\quad,\quad dx=\frac{dy}{\cot(\theta/2)}\quad\Rightarrow\qquad x=c_1\int(1-\cos(\theta))d\theta=c_1(\theta-\operatorname{sen}(\theta))+c_2\,,$$

De la condición $y(x=0)=0$, encontramos $c_2=0$. El haz de curvas es pues

$$\begin{cases} y=c_1(1-\cos(\theta))\,,\\ x=c_1(\theta-\operatorname{sen}(\theta))\ . \end{cases}$$ haz de cicloides cuya circunferencia generatriz tiene radio $R=c_1$

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi R}{l_0}=\dfrac{2\pi}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\\[2ex] \dfrac{h}{l_0}=\dfrac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$



El Principio de Hamilton establece que:

De todas las trayectorias posibles (compatibles con posibles ligaduras) un sistema dinámico de desplaza en el tiempo de un estado a otro siguiendo sólo la trayectoria que minimiza la integral temporal de T-U.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - U)\,dt = 0$$

Ejm. Oscilador armónico y péndulo simple.

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

La lagrangiana (aquí sistema conservativo newtoniano) es escalar y formulable en coordenadas GENERALIZADAS

No se usan vectores, no aparecen fuerzas ¡¡

El cálculo de variaciones permite extender las ecuaciones de Euler-Lagrange incluyendo condiciones en las variables, LIGADURAS, y más allá de sistemas conservativos: Tarea del Curso.

Notas sobre la formulación Lagrangiana (frente a la de Newton)

1.- No necesitan ser derivadas de principios variacionales, pero hoy es más riguroso (Lagrange 1788, Hamilton 1834, Jacobi (1837) … Weierstrass, etc

2.- No da una teoría nueva, pero sí una formulación nueva ¿por qué usarla?
Está asociada a problemas de MINIMOS usuales en Física.

3.- Maneja un escalar L, da ecuaciones de movimiento sin pasar por F, no usa idea de fuerza (fuerzas a veces imposibles de determinar si ligaduras en Newton).

4.- *L* es invariante (no cambia en sistemas coordenados), las variables pueden no ser posiciones de espacio físico (ejm. ángulos, energía...)

5.-Energía versus Fuerza: en física moderna persiste "energía", como en Cuántica, Hamilton relaciona hoy física clásica y moderna.

6.- ¿Viola principio de causalidad? lo lleva a principio más último.

7.- Idea ya avanzada en la Antigüedad en óptica -Herón. II AC de distancia mínima) y posteriormente Fermat 1657 (Ley de Snell). En Mecánica "ímpetu mínimo" de Maupertius 1747, luego hasta hoy ***conectando Newton y teoría de campos.***

Extensión de la formulación si hay ligaduras:
aplicar Prpio. Variacional condicionado: salen **multiplicadores de Lagrange** en el método.

Tipos de ligaduras: holónomas, y no holónomas. En general, son de la forma:

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0$$

Dar ecuaciones de transformación (directa e inversa) para **coordenadas y velocidades generalizadas**, y contar con las ligaduras del sistema en tales coordenadas.

$$\begin{aligned} x_{\alpha,i} &= x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \qquad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \\ &= x_{\alpha,i}(q_j, t), \qquad j = 1, 2, \ldots, s \end{aligned}$$

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t)$$

Una vez elegidas las coordenadas generalizadas, el estado del sistema se representa por sus valores en todo t, no han de ser “posiciones” necesariamente (ángulos, energía, momentos…) .

Ligaduras:

a) Holónomas, son relaciones algebraicas de las coordenadas (y posiblemente con el tiempo) de la forma:

$$\phi_1(\vec{r},t) = 0\,, \quad \phi_2(\vec{r},t) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots, \phi_M(\vec{r},t) = 0\,. \tag{31}$$

Ejemplo: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

(relaciones geométricas dependientes de t)

b) No holónomas, todas las demás :
Ambas pueden ser *reónomas* (dependen de t) o *esclerónomas* (no cambian con t)

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

En general relacionan coordenadas y velocidades (semiholónomas)

$$\sum_{i=1}^{i=3N} A_{ri}\dot{x}^i + A_r = 0$$

A veces pueden ser integrables, son holónomas.

Conviene usar un conjunto de *f=3N-M* **coordenadas generalizadas**, relacionadas con las cartesianas, por una transformación invertible (Jacobiano no nulo) y para que las ligaduras holónomas se satisfagan de forma automática.

Así el vector de posición (de cada partícula) se puede escribir en función de las $\{q\}$ y de t:

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t)\,, \tag{32}$$

con velocidad:

$$\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\,, \tag{33}$$

donde los vectores $\vec{a}_\alpha = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}$ constituyen una base (Jacobiano de transformación no nulo)

en la que expresar las componentes de la fuerza ***F*** **,** así se tienen coordenadas, velocidades y fuerzas generalizadas. Por ejemplo:

$$Q_\alpha = \vec{f} \cdot \vec{a}_\alpha$$

Algunas **relaciones importantes**:

$$\vec{v}(q,\dot{q},t) = \sum_{\gamma=1}^{f} \dot{q}_\gamma \vec{a}_\gamma + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{f} \dot{q}_\gamma \frac{\partial \vec{a}_\gamma}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \sum_{\gamma=1}^{f} \dot{q}_\gamma \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial t} \equiv \dot{\vec{a}}_\alpha \tag{45}$$

Que permiten deducir las Ecuaciones de Lagrange para “una” partícula (no necesariamente en espacio 3D) a partir de la la Ley de Newton:

$$\vec{f} = m\dot{\vec{v}}$$

La fuerza generalizada $Q_\alpha = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{a}_\alpha$ se expresa como:

$$Q_\alpha = \vec{f} \cdot \vec{a}_\alpha = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{a}_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v} \cdot \vec{a}_\alpha) - m\vec{v} \cdot \dot{\vec{a}}_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_\alpha}) - m\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_\alpha} =$$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}, \qquad (46)$$

- Lo que lleva a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

- Ecuaciones de Lagrange (de "una partícula") donde las Q cuentan, en principio, con todas las contribuciones de fuerzas naturales o vinculadas a ligaduras.
- Como caso particular, de *F* deriva de un potencial newtoniano, se tienen las ecuac. de Euler-Lagrange.
- También , la fuerza puede derivar de un potencial generalizado según $\vec{f}^* = -\frac{\partial U(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}}$
- Lo que lleva a $Q^*_\alpha \equiv \vec{f}^* \cdot \vec{a}_\alpha = -\frac{\partial U(q,\dot{q},t)}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha}$. (68)

y si toda fuerza ***activa*** se expresa así (sin ligaduras), *L=T-U*, es la **Lagrangiana de la partícula (o sistema), pero U no es potencial newtoniano en general.**

Para el caso de un sistema de N partículas, puede seguirse un proceso análogo, en este caso se tienen 3N variables cartesianas. Si el número de ligaduras holónomas es M, se pueden elegir

$$f=3N-M$$

variables generalizadas, es el número de ***grados de libertad,*** para que tales ligaduras se cumplan automáticamente.

$$\phi_l(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t)=\phi_l(\vec{r},t)=0\ ,\ l=1,2,\ldots,M$$

Suponiendo 3N variables **{q}** (de las que M pueden ser constantes de movimiento)

$$q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t)\ ,\ \alpha=1,\ldots,3N$$
$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,\ldots,q_{3N},t)\ ,\ i=1,\ldots,N\ ,$$
$$\det\left|\frac{\partial q_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\right|\neq 0\ .$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtendrán, como para una partícula, pero ahora *i* va de 1 a N.

$$\sum_i(\vec{F}_i-\dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i=0$$
$$Q_\alpha=\sum_i \vec{F}_i^{(a)}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_i\dot{\vec{p}}_i\delta\vec{r}_i=\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=\sum_{i,\alpha}m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\\ \displaystyle\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_\alpha}\\ \displaystyle\vec{v}_i=\sum_\beta\dot{q}_\beta\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\beta}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\end{array}\right.$$

$$\sum_\alpha \delta q_\alpha \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) - Q_\alpha \right] = 0$$

Se obtiene:

Donde las fuerzas generalizadas pueden contener tanto las fueras de ligaduras como las activas. Pero las de ligadura holónomas pueden NO aparecer en las ecuaciones.

Un caso particular: si F deriva de un potencial generalizado $U(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ función de las 3N+3N+1 variables de {**r**},{v} y t. Para 1D:

$$Q_\alpha \equiv \vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha = -\frac{\partial U(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}\cdot\vec{a}_\alpha + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}} \right)\cdot\vec{a}_\alpha = -\frac{\partial U(q,\dot{q},t)}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

(demo.). Un caso especial es la fuerza de Lorentz sobre carga en campo electromagnético, se obtiene del potencial U y el lagrangiano: (probarlo pag.10)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right),$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$U = q(\phi - \vec{A}\vec{v})$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A}\vec{v}$$

IMPORTANTE: L no es única, si se toma como lagrangiana otra L´ tal que

$$L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

Se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento. (basta ver que el operador de L sobre tal función es nulo)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{dF}{dt} = 0$$

Se Observa que las mismas ecuaciones de movimiento de la carga se obtienen con otros potenciales según

$$(\phi \to \phi' - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{A} \to \vec{A}' + \nabla \varphi) \qquad U \to \mathrm{q}(\phi' - \vec{A}' \cdot \vec{v}) - \mathrm{q}\frac{d\varphi}{dt}$$

Otro ejemplo es el potencial generalizado centrífugo:

(aceleración del origen $= \vec{a}_o'(t)$, velocidad angular $= \vec{\Omega}(t)$)

$$U = -m\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - m\frac{1}{2}(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2 + m\,\vec{a}_o' \cdot \vec{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} = -m(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}), \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -m(\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) - m(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{\Omega} + m\vec{a}_0',$$

$$\vec{F}_I = -m\,\vec{a}_o' + m(\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{\Omega} + \frac{d}{dt}(-m(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})) =$$

$$= -m(\vec{a}_o' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v})$$

Conviene expresar la energía cinética

•T en función de coordenadas y velocidades generalizadas.

$$\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad , \tag{34}$$

con

$$T_0 = \frac{1}{2} m \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \qquad T_1 = m \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{a}_\alpha \dot{q}_\alpha , \qquad T_2 = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^{f} \sum_{\beta=1}^{f} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta , \tag{35}$$

$$NOTA: \; para\, un\, sistema\; U \equiv U(\vec{r}, \vec{v}, t) \equiv U(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_N}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v}_N, t)$$

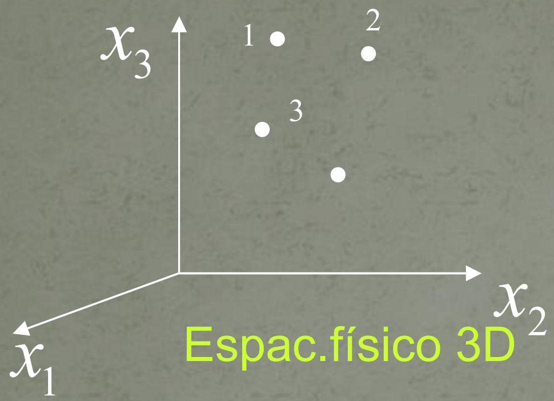
$$f\, sobre\, la\, part.n \equiv \vec{f}_n = -\frac{\partial U(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}_n} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}_n} \right)$$

<u>Notas sobre I1 (apuntes) :</u>

<u>Derivación geométrica de las ecua. De Lagrane.</u>
<u>Ley de Newton en espacio de configuration 3N-D</u>

1.Ley de Newton en el espacio de configuración 3N-D

Ver artículo:* *J. Casey, Am. J. Phys. 62 (9), 1994.



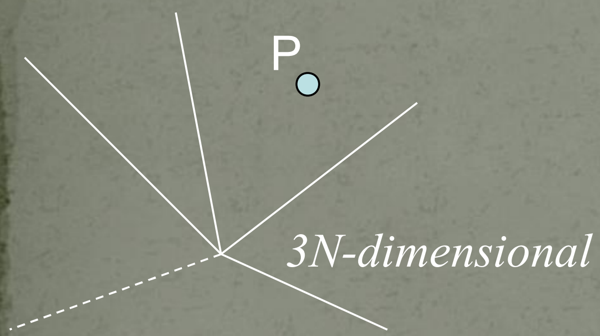
$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(n) = M(n)\,\ddot{x}_i(n) \\ i = 1, 2, 3; \;\; n = 1, 2, \; \ldots N \\ F_1(n)\,, \;\; F_2(n)\,, \; F_3(n) \end{array} \right.$$

Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles

James Casey
Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, California 94720

(Received 29 November 1993; accepted 6 April 1994)

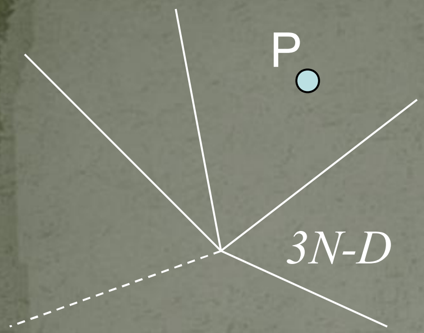
A concise but general derivation of Lagrange's equations is given for a system of finitely many particles subject to holonomic and nonholonomic constraints. Based directly on Newton's second law, it takes advantage of an inertia-based metric to obtain a geometrically transparent statement of Lagrange's equations in configuration space. Illustrative examples are included.



Espacio configuración cartesiano.

$$P \Rightarrow \left\{ x^1, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ x_1(1), x_2(1), x_3(1), \ldots, x_1(N), x_2(N), x_3(N) \right\}$$



3N-Dcartesiano

Se asocian 3N masas cartesianas según :

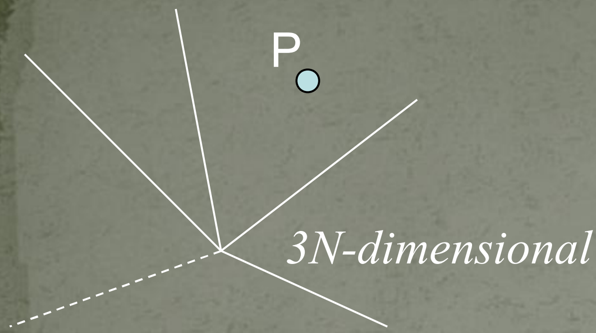
$$\Rightarrow \left\{ m_1, m_2\ m_3, \ldots, m_{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ M(1), M(1), M(1), \ldots, M(N), M(N), M(N) \right\}$$

Y 3N componentes de una fuerza f :

$$\Rightarrow \left\{ f_1, f_2\ f_3, \ldots, f_{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ F_1(1), F_2(1), F_3(1), \ldots, F_1(N), F_2(N), F_3(N) \right\}$$



Las componentes de f en el espacio de configuración son :

$$f_k = m_k \ddot{x}^k \ ,$$

$$k = 1, 2, \ \ldots, 3N \ ,$$

La energía Cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} M(n)\left(\dot{x}_1(n)^2 + \dot{x}_2(n)^2 + \dot{x}_3(n)^2 \right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k (\dot{x}^k)^2$$

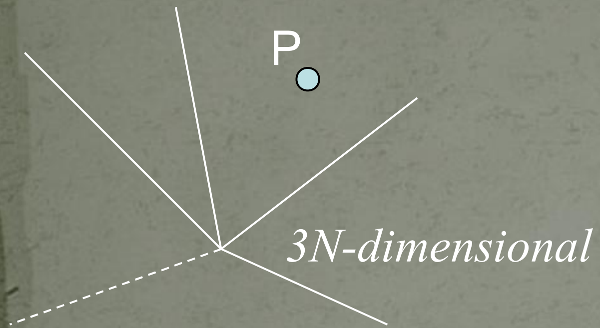
La correspondenciaentre ambos espacios se logra renumerando índices:

$$x_i(n) = x^{3n-3+i}, \quad con \ \ n = 1, 2, ..., N$$

$$F_i(n) = f_{3n-3+i}, \quad donde \ \ i = 1, 2, 3$$

$$M(n) = m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n} \ ,$$

Espacio vectorial de configuración:



• Se definen coordenadas de un punto P:

$$\tilde{x}^k = x^k \sqrt{\frac{m_k}{m}},$$

Conla masa total

$$m = \sum_{i=1}^{N} M(i),$$

•Y una métrica (norma) en espacio 3N-D:

$$d_{OP}^2 = \sum_{k=1}^{3N} (\tilde{x}^k)^2 \equiv \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{3N} m_k (x^k)^2,$$

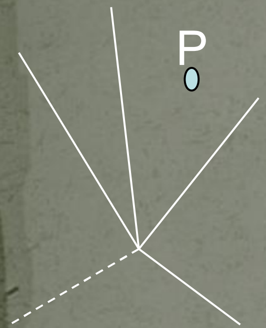
•P puede representar un vector de posición $\vec{r}$ en el espacio de configuración

•Con la base ortonormal $\left\{ \vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_1, \ldots, \vec{\tilde{e}}_{3N} \right\}$

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3N} \tilde{x}^k \vec{\tilde{e}}_k, \qquad \vec{r} \cdot \vec{r} = d_{OP}^2.$$

27

Espacio de configuración:



•Y con un par de bases fijas recíprocas $\{\vec{e}_k\}$ $\{\vec{e}^{\,k}\}$

$$\vec{e}_k = \vec{\tilde{e}}_k \sqrt{m_k / m}\,, \qquad \vec{e}^{\,k} = \vec{\tilde{e}}_k \sqrt{m / m_k}\,,$$

$$\vec{e}^{\,k} \cdot \vec{e}_j = \delta^{\,k}_{\,j}\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, 3N;\ k = 1, 2, \ldots, 3N)$$

•Posición y velocidad de P son : $\vec{r}$

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3N} x^k \vec{e}_k\,, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \dot{x}^k \vec{e}_k\,,$$

• lo que permite construir la fuerza del espacio de configuración sobre “una” partícula como

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{3N} f_k \vec{e}^{\,k}\,,$$

28

• Lo que lleva a relaciones de partícula en el espacio de configuración, con su métrica *ds*, como las de una partícula en espacio 3D (formalmente idéntico al caso del movimiento una partícula) :

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{f}\cdot\vec{v} = \frac{dT}{dt},$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}\dot{x}^k\dot{x}^j\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j \equiv T, \qquad ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{2T}{m}dt^2,$$

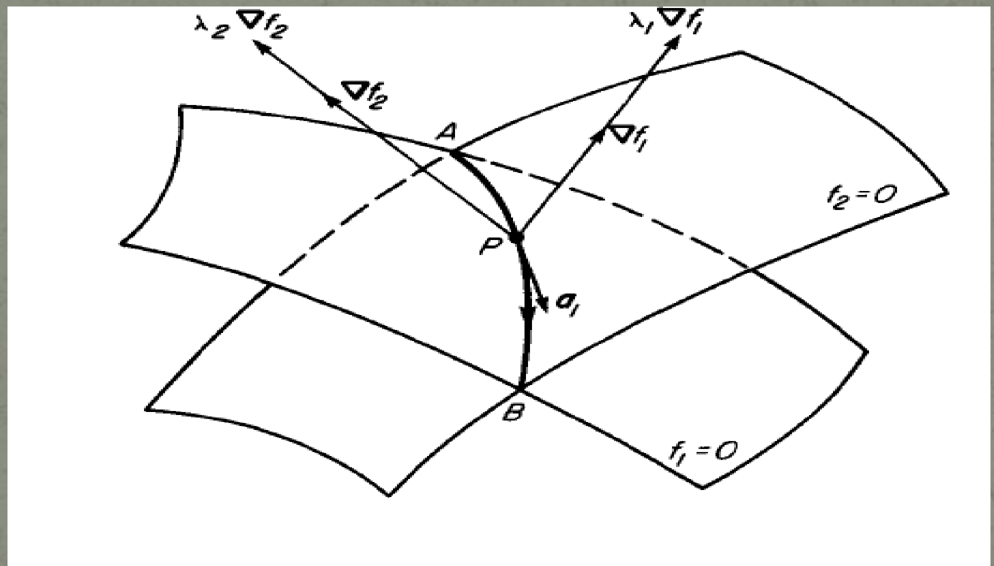
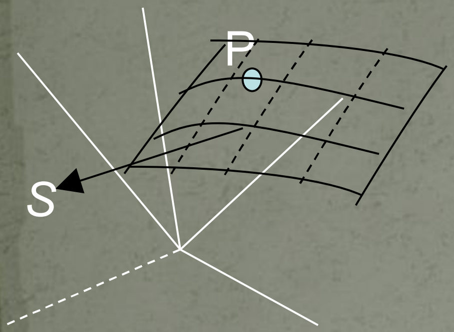


Fig. 2. Two constraint surfaces $f_1=0$ and $f_2=0$ intersecting to form a one-dimensional configuration manifold AB. The tangent space to AB at the point occupied by the particle P is a straight line passing through this location and parallel to the vector $\mathbf{a}_1$. Both ∇f_1 and ∇f_2 are perpendicular to $\mathbf{a}_1$.

29

Variedades en el espa. De conf. y geometría



•*Si las N* partículas se someten a *M* ligaduras holónomas (geométricas)

$$\phi_j(\vec{r}, t) = 0\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, M < 3N)$$

•Cada relación define una hipersuperficie de dimension *3N-1* .

•La intersección de ellas es un subconjunto *S* de dimensión

f = 3N - M.

P permanece en *S* descrito con un mínimo número de variables *f* para localizar a P en *t* en *S*. Las *f coordeandas gaussianas se llaman variables generalizadas, y f es el número de* ***grados de libertad*** *del sistema.* *S es una variedad* con geometría de Riemann.

$$\vec{r} = \vec{r}(q, t), \quad q = q_1, q_2, \ldots, q_f\,. \qquad \vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, f\,.$$

30

• Y con las relaciones de la Sección I.1.3, la energía cinética se puede descomponer según:

$$\vec{v} = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}(q,t)}{\partial t}, \qquad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 . \qquad T_1 = m \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{a}_\alpha \right) \dot{q}_\alpha , \qquad T_2 = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^{f} \sum_{\beta=1}^{f} (\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \geq 0,$$

$$métrica: \quad ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{f} \sum_{\beta=1}^{f} (\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) dq_\alpha dq_\beta = \frac{2T_2}{m} dt^2 \geq 0,$$

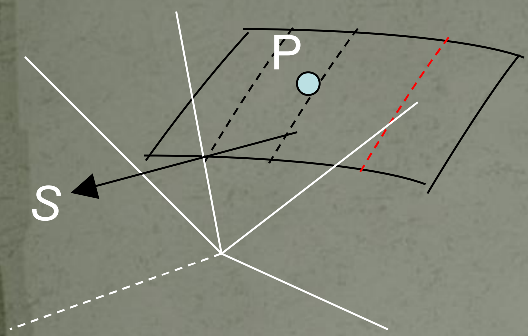
• T_2 es función homogénea de grado 2, forma cuadrática definida positiva.

• T debe coincidir con la energía cinética de las N partículas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{f} m_\alpha \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_n}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \overrightarrow{r_n}}{\partial t} \right)^2$$

•Se llega a las ecuaciones de Lagrange como se hizo para una partícula.

31



- Con los vectores $\vec{a}_\alpha$ del espacio tangente como base: (Secc. I.1.4, pág. 5)

$$\vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha = m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{a}_\alpha\,, \qquad Q_\alpha = \vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha\,,$$

$$m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{a}_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\cdot\vec{a}_\alpha) - m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{a}_\alpha}{dt},$$

- Y de

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_\alpha}, \qquad \frac{d\vec{a}_\alpha}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_\alpha}, \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_\alpha}) - m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_\alpha},$$

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

$$Si \quad \vec{f}^* = -\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\vec{v}},$$

$$Se\ define\ la\ lagrangiana\ L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,f.$$

32

Introducción de las ligaduras.

En general, no todas las fuerzas derivan de un potencial generalizado *U.* Hay que partir de la ecuación general de Lagrange para T y descomponer cada Q en contribuciones.

Las ligaduras implican fuerzas sobre el sistema ¿Cuáles?

A) Si sólo hay M ***ligaduras holónomas*** éstas pueden usarse para definir 3N-M=f variables ***independientes*** {q}, el Principio Variacional da las ec. de Lagrange como en ausencia de ligaduras , pero se pierde información de fuerzas asociadas.

$$\phi_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = \phi_l(\vec{r}, t) = 0 \ , \ l = 1, 2, ..., M$$

Otro procedimiento: Principio variacional condicionado y método de **multiplicadores de Lagrange.** Ejm. Caso en dos variables.

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \rightarrow \delta I = 0 =$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} L dt = \int \sum_{\alpha=1}^{2} [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}] \delta q_\alpha \, dt$$

Pero las dos δq_α no son independientes si hay una ligadura

$$\phi_l(q_1, q_2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_l}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \phi_l}{\partial q_2} \delta q_2 = 0$$

Hay que eliminar una variación de q en función de la otra para tener una variable Independiente.

Así , se elige: $NOTACIÓN\,(operador):\ \ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$

$$\ell_1(L)\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\right)^{-1} = \ell_2(L)\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\right)^{-1} = \lambda(t)$$

Da dos ecuaciones , más la de ligadura para tres incógnitas.

$$\ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha},\ \alpha = 1,2$$

En general:

$$\ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t)\frac{\partial \phi_l(q,t)}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1,\ldots,3N$$

Se tienen 3N+M ecuaciones (de Lagrange más ligaduras si todas se incluyen) e incógnitas (pueden incluirse sólo algunas ligaduras y multiplicadores)

Significado físico: se obtienen las mismas ecuaciones que si se hubiera usado el lagrangiano

$$\widehat{L} = L + \sum_l \lambda_l(t)\phi_l(q,t)$$

Los multiplicadores están relacionados con las fuerzas generalizadas de ligadura (normales a superficies definidas por ligaduras, no hacen trabajo virtual).

$$\sum_l \lambda_l(t)\frac{\partial \phi_l(q,t)}{\partial q_\alpha} = \sum_l \lambda_l(t)\frac{\partial \phi_l(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} = \vec{F}^{CH}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha},\ (esp.config.)$$

Se obtienen así las fuerzas de ligadura en sistema holónomo de lagrangiana L

B) **Ligaduras anholónomas.** No hay procedimiento general, podría operase igual pero estas ligaduras tienen a las velocidades

$$\phi_r(q,\dot{q},t) = 0, \quad r = 1,\ldots,L$$

Y en el cálculo variacional no se prescriben las variaciones virtuales de las velocidades. Aún así, daría

$$\widehat{L} = L + \sum_l \lambda_l(t)\phi_l(q,t)$$

$$\ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\sum_{l=1}^{L}\left[\lambda_l(t)\ell_\alpha(\phi_l) + \dot{\lambda}_l(t)\frac{\partial \phi_l}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]$$

Con derivadas primeras de los multiplicadores, de los que no se conocen condiciones iniciales

Cada caso ha de estudiarse independientemente. Un caso particular simple es el de ligadura semiholónoma:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=f} B_{r\alpha}(q,t)\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0 \quad (57)$$

Por comparación y extensión del caso holónomo, pueden introducirse multiplicadores

$$\vec{f}_r^{\,CN} \cdot \vec{a}_\beta = \mu_r \vec{b}_r \cdot \vec{a}_\beta = \mu_r B_{r\beta} \quad , \qquad (r = 1, 2, \ldots, L;\ \beta = 1, 2, \ldots, f)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q^*_\alpha + \sum_{r=1}^{r=L} \mu_r B_{r\alpha}$$

Conviene descomponer (si es posible) las fuerzas según procedencia y partir de las ecuaciones generales de Lagrange para la T.

Por ejemplo:

$$\ell_\alpha(T) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^U + Q_\alpha^{CH} + Q_\alpha^{CN} + Q_\alpha^*$$

Fuerzas generalizadas:derivadas de un potencial, asociadas a ligaduras holónomas,

anholónomas y otras, como las disipativas de Rayeigh , giroscópicas etc.

Algunos casos de fuerzas:

a) giroscópicas, aquellas de potencia nula, es decir $\sum_{i=1}^{i=f} Q_i \dot{q}_i = 0$

con caso particular de potencial generalizado: $U(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{f} \Pi_i(q)\dot{q}_i \quad dando \quad Q_\alpha^U = \ell_\alpha(U)$

b) disipativas a aquellas cuya potencia es negativa y pueden derivar de una función *W* (potencial de Rayleigh) :

$$\sum_{i=1}^{i=f} Q_i \dot{q}_i < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,k=1}^{f} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \\ Q_i = -\dfrac{\partial W(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right. \Longrightarrow Q_i = -\sum_{k=1}^{k=f} b_{ik}\dot{q}_k$$

Si el sistema es holónomo y todas las fuerzas derivan de potenciales generalizados se dice SISTEMA LAGRANGIANO y si es newtoniano se le dice ***NATURAL.***

Sistemas Lagrangianos, sus ecuaciones de movimiento derivan de un lagrangiano de forma general $L=L_0+L_1+L_2$:

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{f} c_{ik}(q,t)\,\dot{q}_i\dot{q}_k\ , \quad L_1 = \sum_{i=1}^{f} c_i(q,t)\,\dot{q}_i\ , \quad L_0 = c_0(q,t)$$

y sus ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = 0\,,$$

Ejm. *$L=T-U(r)$.*

Constantes del Movimiento. Simetrías y Conservación.

Constante del movimiento ,integral primera: Cualquier función que permanece constante durante el movimiento del sistema.

Ejm. Si una coordenada no aparece explícitamente en L, se dice ***cíclica o ignorable,*** entonces su momento generalizado asociado en constante:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv p_\alpha = cte.$$

$$Ejm2, si\ \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[L - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} q_\alpha\right] = 0 \Rightarrow \ L - \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha = -H = Cte.$$

Las leyes de conservación están relacionadas con simetrías y con las llamadas transformaciones *invariantes* del sistema.

A veces la Lagrangiana es independiente de *t*, o de una coordenada *q* siendo entonces L invariante ante traslaciones temporales o espaciales.

El IMPORTANTE **Teorema de Noether** **(Amelie Emmy Noether, 1832-1935)**

establece que

A cada simetría de la lagrangiana le corresponde una ley de conservación

Si ***L*** es invariante ante traslaciones en el tiempo, en el espacio o ante rotaciones, se dan las leyes de conservación de la energía, del momento lineal o del angular, respectivamente
(consecuencias de la homogeneidad del tiempo, y de la homogeneidad e isotropía del espacio) .

I.2.5 Transformaciones invariantes. (Teorema de Noether)

Existen transformaciones puntuales invertibles dando ecuaciones explicitas de Lagrange exactamente iguales en la nuevas coordenadas: Se dice que las ecuaciones son invariantes a este tipo de transformaciones (la transformación de invariancia, se dice entonces que es una "simetría").

transformación puntual invertible, $q' = q'(q,t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial q'} = 0 \quad \Rightarrow \quad q'(t) \qquad q'(t) \equiv q'(q(t),t)$$

una transformación con $L'(q',\dot{q}',t) = L(q(q',t),\dot{q}(q',\dot{q}',t),t)$ *–cambiar las q como funciones de q`–* **es de invariancia si la Lagrangiana lo es**

$$L'(q',\dot{q}',t) = L(q',\dot{q}',t)$$

de forma trivial, pero, más general es la condición:

$$L'(q',\dot{q}',t) = L(q',\dot{q}',t) + \frac{d\psi\,(q',t)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad L(q,\dot{q},t) = L(q',\dot{q}',t) + \frac{d\psi\,(q',t)}{dt}$$

Ejemplo: $L = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2$, sea $x' = x + a(t)$,

$$L = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}' - \dot{a})^2 = \frac{1}{2} m\,\dot{x}'^2 + \frac{1}{2} m\,\dot{a}^2 - m\dot{a}\,\dot{x}' = \frac{1}{2} m\,\dot{x}'^2 + \frac{d\psi(x',t)}{dt} \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial x'}\dot{x}' + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2} m\,\dot{a}^2 - m\dot{a}\dot{x}', \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial x'} = -m\dot{a}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2} m\,\dot{a}^2$$

es decir: $\ddot{a} = 0$, ($\dot{a} = v_0$, $a = v_0 t + a_0$) $\psi = \frac{1}{2} m\,\dot{a}^2 t - m\dot{a}x'$,

$x' = x + v_0 t + a_0$. (Transformación de galileo).

Ejm. Partículas libres sin interacción

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_n = \vec{r}_n{}' - \vec{V}t - \vec{r}_0 \\ \vec{v}_n = \vec{v}_n{}' - \vec{V} \end{array} \right.$$

$$L'(\vec{r}',\vec{v}',t) = L(\vec{r},\vec{v},t) = L(\vec{r}_n{}' - \vec{V}t - \vec{r},\vec{v}_n = \vec{v}_n{}' - \vec{V},t) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_n m_n\,|\vec{v}_n{}' - \vec{V}\,|^2$$

Ejm. Transformación de Galileo: En todos los sistemas inerciales se verifican las mismas leyes de la mecánica.

Leyes invariantes ante transformaciones de Galileo. Ejm. Sistema newtoniano (natural) de partículas interactuando con potenciales *U*.

$$\begin{cases} \vec{r}_n = \vec{r}_n{}' - \vec{V}t - \vec{r}_0 \\ \vec{v}_n = \vec{v}_n{}' - \vec{V} \end{cases}$$

$$L'(\vec{r}', \vec{v}', t) = L(\vec{r}_n{}' - \vec{V}t - \vec{r}, \vec{v}_n{}' - \vec{V}, t) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_n m_n |\vec{v}_n{}' - \vec{V}|^2 - \sum_{n,k} U(|\vec{r}_n{}' - \vec{V}t - \vec{r}_0 - (\vec{r}_k{}' - \vec{V}t - \vec{r}_0)|) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_n m_n |\vec{v}_n{}' - \vec{V}|^2 - \sum_{n,k} U(|\vec{r}_n{}' - \vec{r}_k{}'|) = L(\vec{r}', \vec{v}', t) + \frac{d\psi(\vec{r}', t)}{dt}$$

$$con \qquad \psi(\vec{r}', t) = \sum_n m_n (V^2 t/2 - \vec{V} \cdot \vec{r}_n{}')$$

Ambas lagrangianas dan las mismas ecuaciones del movimiento, y difieren sólo en una constante. Y la transformación … ¿es invariante?

$$\vec{r}_n = \vec{r}_n{}' - \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 - \vec{V}\,t - \vec{r}_0 \;\; ; \; \vec{v}_n = \vec{v}_n{}' - \vec{a}\,t - \vec{V}$$

Transformaciones infinitesimales. El cambio paramétrico

$$q' \equiv q'(q,t;\alpha) \text{ con p parámetros } \alpha \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p \quad \text{y} \quad q = \{q_1, \ldots, q_f\}$$

$$\text{siendo } q'(q,t;\alpha_0) = q \text{ con variación } \alpha = \alpha_0 + \delta\alpha \quad ,(\|\delta\alpha\| < \varepsilon)$$

$$q' = q'(q,t;\alpha_0) + \left.\frac{\partial q'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha 0} \delta\alpha = q + \left.\frac{\partial q'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha 0} \delta\alpha \equiv q + \delta q$$

Para transformación infinitesimal invariante (pág. 16),

$$L(q,\dot{q},t) = L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) + \frac{d\delta\psi}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \delta\psi = cte. \quad \Rightarrow \quad \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta\psi = cte$$

A cada transformación infinitesimal invariante se le asocia una ley de conservación o constante del movimiento

Debido a la **homogeneidad e isotropía del espacio** para un sistema aislado se deducen la conservación del **momento lineal y del angular** por transformaciones invariantes ante traslación y rotación global del sistema.

Sistema de partículas aislado Newtoniano $L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

Invariancia ante traslaciones: Aplicando Noether para una traslación del sistema:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{a} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{a} \equiv \vec{P} \cdot \delta \vec{a} = cte, \Rightarrow \quad \vec{P} = cte$$

Puede conservarse **sólo alguna**(s) **componente**(s) del momento incluso en sistemas no aislados: aquellas en las que la traslación del sistema está en dirección de fuerza invariante (Ejm. Coordenada cíclica) También con **ligaduras holónomas** (si son invariantes también).

Invariancia ante rotaciones: Ante una rotación global del sistema entorno al eje ***u***

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta \vec{\varpi} \times \vec{r}_i = \vec{r}_i + (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta \qquad \dot{\vec{r}}_i'^{\,2} = \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{u} \times \dot{\vec{r}}_i)\delta\theta \equiv \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta \equiv L_u \delta\theta = cte, \Rightarrow \quad \vec{L} = cte$$

La **conservación de la energía** es consecuencia de la homogeneidad del tiempo y de la invariancia de la *L* ante traslaciones temporales, ***también*** válida si hay ligaduras No-holónomas ideales, *ver* (83):

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=f} B_{r\alpha} \dot{q}_\alpha = 0 \qquad H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = Cte. \quad \text{si} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Transformaciones infinitesimales. El cambio paramétrico

$$q' \equiv q'(q,t;\alpha) \text{ con p parámetros } \alpha \equiv \alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_p \quad \text{y} \quad q = \{q_1,\ldots,q_f\}$$

$$\text{siendo } q'(q,t;\alpha_0) = q \text{ con variación } \alpha = \alpha_0 + \delta\alpha \quad ,(\|\delta\alpha\| < \varepsilon)$$

$$q' = q'(q,t;\alpha_0) + \left.\frac{\partial q'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha 0} \delta\alpha = q + \left.\frac{\partial q'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha 0} \delta\alpha \equiv q + \delta q$$

Para transformación infinitesimal invariante (pág. 16),

$$L(q,\dot q,t) = L(q+\delta q,\dot q + \delta \dot q,t) + \frac{d\delta\psi}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q + \delta\psi = cte. \quad \Rightarrow \quad \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\delta q_j + \delta\psi = cte$$

A cada transformación infinitesimal invariante se le asocia una ley de conservación o constante del movimiento

Debido a la **homogeneidad e isotropía del espacio** para un sistema aislado se deducen la conservación del **momento lineal y del angular** por transformaciones invariantes ante traslación y rotación global del sistema.

Sistema de partículas aislado Newtoniano $$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Invariancia ante traslaciones: Aplicando Noether para una traslación del sistema:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{a} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{a} \equiv \vec{P} \cdot \delta \vec{a} = cte, \Rightarrow \vec{P} = cte$$

Puede conservarse **sólo alguna**(s) **componente**(s) del momento incluso en sistemas no aislados: aquellas en las que la traslación del sistema está en dirección de fuerza invariante (Ejm. Coordenada cíclica) También con **ligaduras holónomas** (si son invariantes también).

Invariancia ante rotaciones: Ante una rotación global del sistema entorno al eje ***u***

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{r}_i + (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta \qquad \dot{\vec{r}}_i'^2 = \dot{\vec{r}}_i^2 + 2\dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{u} \times \dot{\vec{r}}_i)\delta\theta \equiv \dot{\vec{r}}_i^2$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{u} \times \vec{r}_i)\delta\theta \equiv L_u \delta\theta = cte, \Rightarrow \vec{L} = cte$$

La **conservación de la energía** es consecuencia de la homogeneidad del tiempo y de la invariancia de la *L* ante traslaciones temporales, ***también*** válida si hay ligaduras No-holónomas ideales, *ver* (83):

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=f} B_{r\alpha} \dot{q}_\alpha = 0 \qquad H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = Cte. \text{ si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

I.4 Transformaciones puntuales que involucren el tiempo (Tª de Noether).

Consideremos la transformación puntual $q' = q'(q,t); \quad t' = t'(t)$

las nuevas variables

$$S = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q(q'(t'),t(t'),\dot{q}(q'(t'),\frac{dq'}{dt'},t(t')))\frac{dt}{dt'}d't \equiv \int_{t'_1}^{t'_2} L'(q',\frac{dq'}{dt'},t(t'),\dot{q}(q'(t'),\frac{dq'}{dt'},t')d't,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt'}\frac{\partial L'(q',dq'/dt',t')}{\partial(dq'/dt')} - \frac{\partial L'(q',dq'/dt',t')}{\partial q'} = 0, \quad L' \equiv L(q(q'(t'),t(t'),\dot{q}(q'(t'),\frac{dq'}{dt'},t(t')))\frac{dt}{dt'}$$

Si la transformación puntual es invariante

$$L(q(q'(t'),t(t'),\dot{q}(q'(t'),\frac{dq'}{dt'},t(t')))\frac{dt}{dt'} = L(q',\frac{dq'}{dt'},t') + \frac{d\psi}{dt'}$$

la transformación infinitesimal invariante: $q' = q + \delta q, \quad t' = t + \delta t \qquad \frac{dt'}{dt} = 1 + \delta\dot{t},$

La condición de invariancia es $\quad L(q,\dot{q},t)\frac{dt}{dt'} = L(q',\frac{dq'}{dt'},t') + \frac{d\psi}{dt'}, \Rightarrow L(q,\dot{q},t) = L(q',\frac{dq'}{dt'},t')\frac{dt'}{dt} + \frac{d\psi}{dt}$

$$L(q,\dot{q},t) = L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q}-\dot{q}\delta\dot{t},t+\delta t)\frac{dt'}{dt} + \frac{d\delta\psi}{dt} \quad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \delta\psi - H\delta t = cte \qquad (106)$$

Tema II : Mecánica Hamiltoniana

I.2.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton.

Como en Termodinámica, pueden aplicarse transformaciones de Legendre para tener funciones con variables independientes distintas:

Ejm. F es transformada de Legendre de la energía interna U:

$$dU = TdS - PdV, \quad \text{sea} \quad F = U - PV \Rightarrow dF = -PdV - SdT$$

Análogamente, puede definirse otra función H con otras variables independientes distintas las de la Lagrangiana:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p,t) \quad , \qquad H(q,p,t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t) \qquad (94)$$

Diferenciando H(q,p,t) se obtendrán 2f ecuaciones diferenciales de primer grado:

$$dH = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

es decir

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_j} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad , \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Equivalentemente, puede pasarse de H a L:

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \Rightarrow \quad p_j = p_j(q,\dot{q},t),$$

$$L(q,\dot{q},t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - H(q,p,t)$$

Ecuaciones de Hamilton. Notación y comentarios.

Nota:Las 2n ecuaciones pueden derivarse del Principio variacional de Hamilton (modificado) sin imponer que p(t) esté fijo en los instantes finales.

(II.1.3 Principio de Hamilton modificado)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt \quad \text{con} \quad q(t_1) \text{ y } q(t_2) \text{ fijados:}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p \bullet \dot{q} - H(q,p,t) \right) dt \equiv -\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right) \bullet \delta q\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right) \bullet \delta p\, dt + \left(p \bullet \delta q \right)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right) \bullet \delta q\, dt = 0 \Rightarrow \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} \end{cases}$$

Se pueden escribir en notación matricial o simpléctica **(II. 1)**:

$$\eta = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\eta}{dt} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{J}^2 = -1, \quad \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} = 1, \quad (\mathbf{J}^T = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J})$$

Para evaluar ***la derivada temporal*** de una función *u(q,p,t)* a lo largo de las soluciones del sistema hamiltoniano, en el espacio de fases asociado, conviene formalizar cálculos con el **Corchete de Poisson.**

II.1.1 Constantes del movimiento. Corchete de Poisson

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

El corchete de Poisson de dos funciones *u*, *v* se define:

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)$$

$$[u,v]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Entonces:

$$\frac{du}{dt} = [u,H]_{q,p} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Los **corchetes fundamentales** son:

$[q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0$;

$[q_j, p_k] = -[p_k, q_j] = \delta_{jk}$

Y las ecuaciones de Hamilton quedan:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = [\, q_i , H \,] \\ \dot{p}_i = [\, p_i , H \,] \end{cases} \qquad o\ bien \qquad \frac{d\eta}{d\,t} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} \equiv [\, \eta \,, H \,]$$

Propiedades (*corchete nulo,, antisimetría, linealidad, producto e Identidad de Jacobi*):

a) $[u,u] = 0$.

b) $[u,v] = -[v,u]$.

c) $[a\,u + b\,v, w] = a[u,w] + b[v,w]$, a, b constantes.

d) $[u\,v, w] = [u,w]v + u[v,w]$

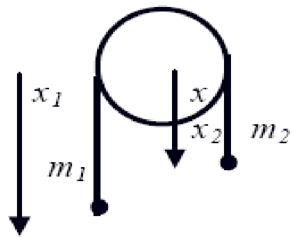
e) $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$. (*identidad de Jacobi*)

Aplicado a H , y si u(p,q,t) es una constante del movimiento:

Si u y v son dos constantes de movimeinto ¿lo será [u,v]?

$$\frac{dH}{d\,t} = \frac{\partial H}{d\,t} \qquad\qquad [H, u] = \frac{\partial u}{\partial\ t}$$

Ejm. Problemas. 1: *La tensión es el multiplicador de Lagrange*



$$\phi = x_1 + x_2 + cte = 0\ , \qquad \vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\ ,$$

variedad de configuración $\vec{r}(x_1) = x_1\vec{e}_1 + (cte - x_1)\vec{e}_2\ ,$

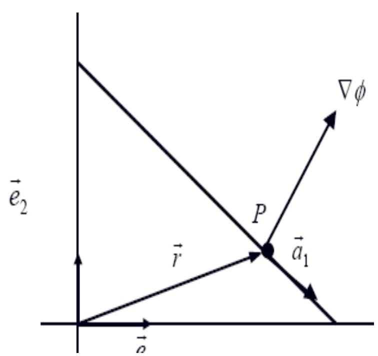
$$\vec{a}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad , \qquad \vec{f} = (m_1 g - T_h)\vec{e}^{\,1} + (m_2 g - T_h)\vec{e}^{\,2} \quad ,$$

$$\left|\vec{e}_1\right| = (m_1/m)^{1/2} \quad , \qquad \left|\vec{e}_2\right| = (m_2/m)^{1/2} \quad , \qquad m = m_1 + m_2$$

$$\nabla\phi = \vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2}\ , \qquad \vec{f}^{\,CH} = -T_h(\vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2}) = -T_h\nabla\phi \quad , \Rightarrow \qquad \vec{f}^{\,CH}\cdot\vec{a}_1 = -T_h(\vec{e}^{\,1} + \vec{e}^{\,2})\cdot(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \equiv 0$$

$$\vec{v} = \dot{x}_1\vec{a}_1\ , \qquad T = \frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 \quad ,$$

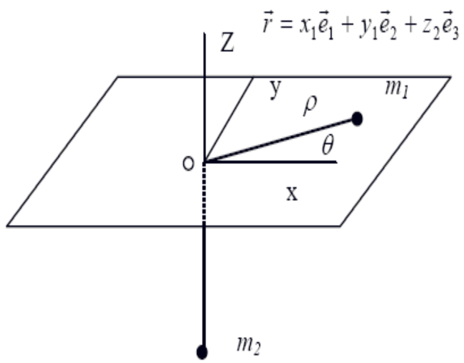
$$Q_1 = \vec{f}\cdot\vec{a}_1 = (m_1 g\,\vec{e}^{\,1} + m_2 g\,\vec{e}^{\,2})\cdot(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (m_1 - m_2)g$$



$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1\ , \qquad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g\ .$$

Si no se proyecta sobre al variedad de configuración, entonces $\vec{a}_1 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x_1} = \vec{e}_1\,, \quad \vec{a}_2 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x_2} = \vec{e}_2$

$$Q_1 = \vec{f}\cdot\vec{a}_1 = m_1 g - T_h\ , \qquad Q_2 = \vec{f}\cdot\vec{a}_2 = m_2 g - T_h\ , \qquad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad .$$



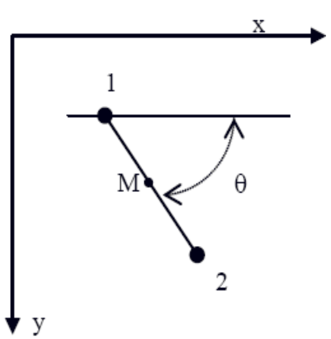
ligadura : $\phi = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - z_2 - L \equiv \rho - z_2 - L = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho \;, \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\,\rho\,\dot{\theta}^2 = -m_2 g$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \;, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m_1\,\rho^2\dot{\theta}) = 0 \;,$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2,$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\rho} - m_1\,\rho\,\dot{\theta}^2 = -T_h\,, & \dfrac{d}{dt}(m_1\,\rho^2\dot{\theta}) = 0 \\ m_2\ddot{z}_2 = T_h - m_2 g \;, & \\ \phi = \rho - z_2 - L = 0 & \end{cases}$$



ligadura: $\dot{x}\,sen\,\theta - \dot{y}\,cos\,\theta = 0\,, \quad (B_{11}\dot{x} + B_{12}\dot{y} + B_{13}\dot{\theta} + B_1 = 0)$,

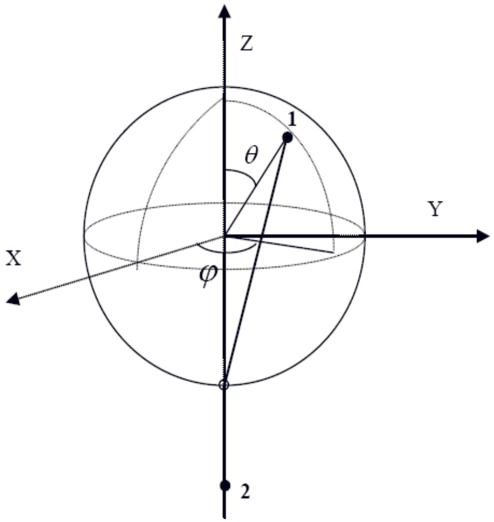
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \mu_1 B_{1x}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = 2m_0 g\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_1 B_{1y}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mu_1 B_{1\theta}\,,$$

$$\dot{x}\,sen\,\theta - \dot{y}\,cos\,\theta = 0\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0\ddot{x} = \mu_1\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \\ 2m_0\ddot{y} = 2m_0 g\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_1\cos\theta \\ 2m_0 L^2\ddot{\theta} = 0\,, \\ \dot{x}\,sen\,\theta - \dot{y}\,cos\,\theta = 0\,, \end{cases}$$



$$\vec{r}(\theta,\varphi) = Rsen\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + Rsen\theta sen\varphi\,\vec{e}_2 + R\cos\theta\,\vec{e}_3 + 2R(\cos(\theta/2)-3/2)\,\vec{e}_4$$

$$T(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,(\dot{\varphi}\,\vec{a}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{a}_\theta)\cdot(\dot{\varphi}\,\vec{a}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{a}_\theta) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

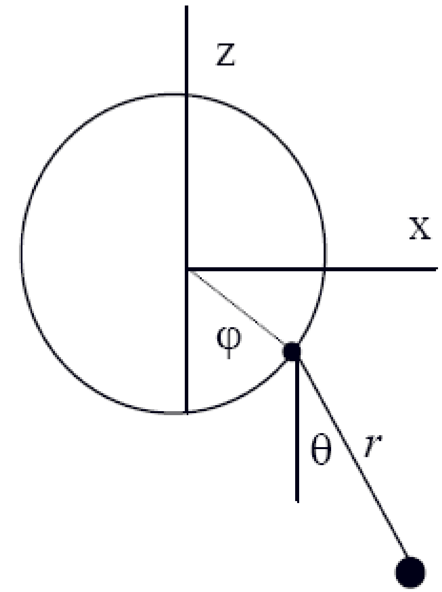
$$z_2 = \quad 2R(\cos(\theta/2)-3/2)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1 R^2(\dot{\theta}^2 + sen^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2 R^2 sen^2(\theta/2)\dot{\theta}^2\ , \qquad U = m_1 gR\cos\theta + m_2 g 2R(\cos(\theta/2)-3/2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - 0 = 0\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_1 R^2 sen^2\theta\,\dot{\varphi} = cte$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow\ T + U = cte\ .$$

5)



$$\dot{\varphi} = \omega = At + B \ , \quad \varphi = \frac{At^2}{2} + Bt \ , \ (\varphi(0) = 0 \ ) \, .$$

θ, r coordenadas generalizadas.

$$x = R\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\,\mathrm{sen}\,\theta \, , \quad z = -R\cos\varphi - r\cos\theta \, .$$

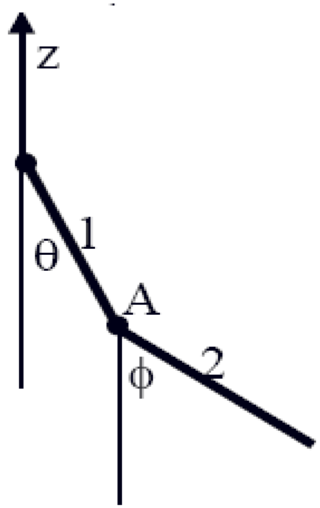
en donde φ es una función explícita del tiempo.

$$T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m((R\omega\cos\varphi + \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 +$$

$$+ (R\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi - \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2) \ ,$$

$$U(r,\theta,t) = \frac{1}{2}k\,r^2 - mg(R\cos\varphi + r\cos\theta) \ ,$$

6)



Sean θ y ϕ coordenadas generalizadas.

$$T = \frac{1}{6}m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}m_2 l_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{M2}^2 \, ,$$

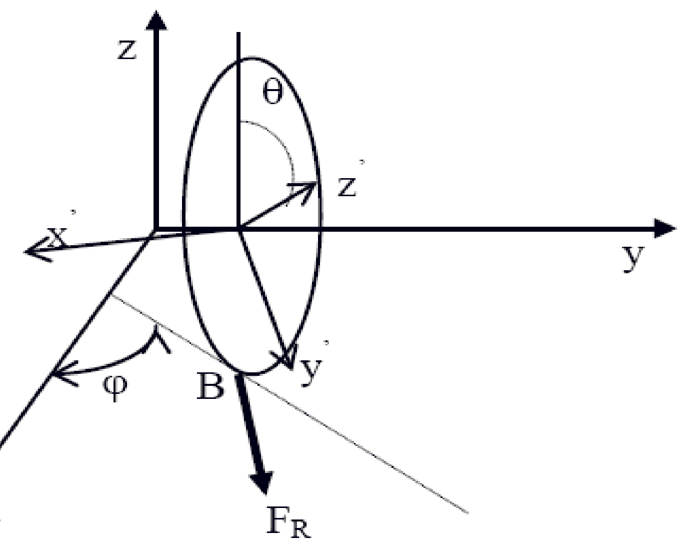
$$\overline{v}_{M2} = l_1 \dot{\theta}\, \overline{u}_\theta + \frac{l_2}{2}\dot{\phi}\, \overline{u}_\phi \quad .$$

$$v_M^2 = l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\phi}^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi}\, cos(\phi - \theta) \, ,$$

$$U = -m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\theta - m_2 g(l_1\cos\theta + \frac{l_2}{2}\cos\phi) \, ,$$

10)

Coordenadas generalizadas: (x, y) del CM y θ, φ. $\quad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{i}\,' + \dot{\varphi}\,\vec{k}$,



$$\vec{v}_B = \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right) + \vec{\omega} \wedge CB =$$

$$= \left(\dot{x} - R\dot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{i} + \left(\dot{y} - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\vec{j} = 0$$

Ecuaciones de ligadura no holónoma:

$$\dot{x} - R\dot{\theta}\,cos\,\varphi = 0 \;, \qquad \dot{y} - R\dot{\theta}\,sen\,\varphi = 0 \,.$$

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\dot{\theta}, -\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta, \dot{\varphi}\cos\theta\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{4}MR^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = \sum\limits_{\beta} \mu_\beta B_{\beta x} = \mu_1 \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y} = \sum\limits_{\beta} \mu_\beta B_{\beta y} = \mu_2 \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = \sum \mu_\beta B_{\beta\theta} = -\mu_1 R\cos\varphi - \mu_2 R\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \qquad \text{(incógnitas: } x\,,\, y\,,\, \theta\,,\, \varphi\,,\, \mu_1,\, \mu_2\text{)} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum \mu_\beta B_{\beta\varphi} \equiv 0 \;, \\ \dot{x} - R\dot{\theta}\,cos\,\varphi = 0 \,, \\ \dot{y} - R\dot{\theta}\,sen\,\varphi = 0 \,, \end{array} \right.$$