

Apuntes de Física I

Dr. L. Conde

Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

23 de febrero de 2010

Nota

Estos apuntes pueden obtenerse gratuitamente en formato pdf en la página web de la asignatura Física I:

**[http://www.aero.upm.es/es/departamentos/
/fisica/PagWeb/asignaturas/fisica1/Fisica1.html](http://www.aero.upm.es/es/departamentos/fisica/PagWeb/asignaturas/fisica1/Fisica1.html)**

donde también se encuentra toda la información relativa al presente curso.

Los apuntes no pretenden sustituir a ninguno de los excelentes textos que se citan en la bibliografía que se encuentran en la Biblioteca del Centro a disposición de los alumnos y cuyo empleo como libros de consulta se aconseja encarecidamente. Con este objetivo, se citan a lo largo del texto secciones específicas de dichos manuales.

La extensión de cada apartado no se corresponde exactamente con el contenido del curso; faltan ejemplos y algún tema adicional que se explicará durante las clases. También se han omitido algunas demostraciones que pueden encontrarse en los textos de la bibliografía.

Un curso de Física elemental necesita ineludiblemente de algunas herramientas matemáticas. Me ha parecido aconsejable incluir un capítulo especial denominado *Complementos* donde se introducen algunos de los conceptos necesarios de un modo informal. A medida que se hacen necesarios se hace referencia en el texto a dichos contenidos.

1. Cinemática de una partícula	1
1.1. Posiciones, velocidades y aceleraciones	1
1.2. Movimiento circular	3
1.3. Movimiento en un plano	5
2. Movimiento relativo	7
2.1. Derivada de un vector	8
2.2. Transformación de velocidades y aceleraciones	9
2.3. Aplicaciones	10
2.3.1. Movimiento circular	11
2.3.2. Movimiento de un sólido rígido	12
3. Dinámica de una partícula	13
3.1. Leyes de Newton	13
3.2. Fuerzas	14
3.2.1. Interacciones	15
3.2.1.1. Campo gravitatorio	15
3.2.1.2. Campo electromagnético	16
3.2.2. Fuerzas macroscópicas	17
3.2.2.1. Reacciones	17
3.2.2.2. Fuerza de rozamiento	17
3.2.2.3. Fuerza de un muelle	18
3.2.3. Fuerzas de inercia	18
3.2.4. El triedro terrestre	19

3.3.	Trabajo y energía	21
3.4.	Fuerzas conservativas	22
3.4.1.	Energía potencial elástica	23
3.4.2.	Energía potencial gravitatoria	24
3.4.3.	Potencial electrostático	26
3.4.4.	Energía potencial centrífuga	26
3.5.	Momento cinético	28
4.	Sistemas de partículas	30
4.1.	Posición y velocidad del centro de masas	30
4.2.	Movimiento del centro de masas	31
4.3.	Energía de un sistema de partículas	32
4.4.	Momento cinético de un sistema de partículas	35
4.5.	Aplicaciones	36
4.5.1.	Sistema de dos partículas	36
4.5.2.	Movimiento bajo fuerzas centrales	38
4.5.3.	Leyes de Kepler	39
4.5.4.	Choques de partículas	41
5.	Cinemática de un sólido rígido	44
5.1.	Centro de masas de un sólido rígido	44
5.1.1.	Cálculo de centros de masas	45
5.2.	Momentos de inercia	48
5.2.1.	Teorema de Steiner	49
6.	Dinámica del sólido rígido	51
6.1.	Movimiento de un sólido rígido	51
6.2.	Movimiento del centro de masas	52
6.3.	Momento cinético del sólido rígido	52
6.4.	Dinámica de rotación	55
6.4.1.	Energía cinética	56
6.4.2.	Ecuación de la energía	57
6.5.	Movimiento plano	60
6.5.1.	Rodadura plana	61
6.6.	Estática	63

7. Movimiento oscilatorio	65
7.1. El oscilador armónico simple	65
7.2. El péndulo simple	68
7.3. El péndulo físico	70
7.4. El oscilador armónico amortiguado	72
7.5. El oscilador armónico forzado	73
8. Introducción a la mecánica de medios continuos	75
8.1. Los estados de agregación de la materia	75
8.2. Elasticidad lineal	76
8.3. Descripción de un medio continuo	77
8.4. Fuerzas en un fluido	78
8.5. Equilibrio de fluidos	79
8.5.1. Fuerzas sobre cuerpos sumergidos	82
8.6. Transporte de masa	83
8.6.1. Ecuación de Bernoulli	84
9. Complementos	87
9.1. Sistemas coordenados	87
9.2. La resolución de las ecuaciones del movimiento	88
9.3. Aproximaciones y series de potencias	90
9.4. Propiedades de la elipse	92
9.5. Campos escalares y vectoriales	93
9.6. Derivadas parciales	93
9.7. Curvas y superficies: Convenio de signos	94
9.8. Integral de línea	95
9.9. Flujo de un campo vectorial	96
9.10. El operador nabla: Gradiente y divergencia	97
9.11. El teorema de Gauss	101
9.12. Ecuación de continuidad y vector flujo másico	101
9.13. Los ejes principales de inercia	103
10. Bibliografía	104
11. Problemas	106

1.1. Posiciones, velocidades y aceleraciones

Una partícula material es un objeto cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con las distancias que recorre en su movimiento. Se trata de una aproximación en la que consideramos solamente los movimientos de traslación de los objetos, que son caracterizados como puntos de masa m . Su posición en el espacio se determina mediante un punto geométrico y por lo tanto por un vector respecto de un triedro de referencia $S(O, X, Y, Z)$ de origen O como se observa en la Fig. 1.1.

Sus coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$ cambian en el curso del tiempo a medida que se desplaza y podemos describir la trayectoria de dicho punto, es decir, el lugar geométrico de los puntos del espacio por los que pasa, mediante un vector de posición $\mathbf{r}(t)$, que representa la posición de la partícula en cada instante,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Obtenemos el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ a partir de este vector derivando respecto del tiempo,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Al efectuar la derivación respecto de un triedro S fijo, cuya posición permanece invariable en el tiempo se toman los vectores unitarios $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ constantes por lo que tendremos,

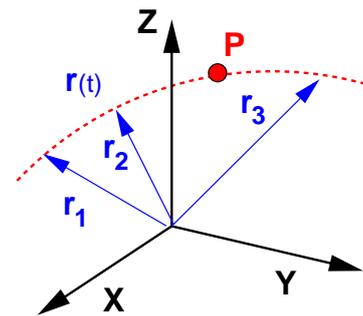


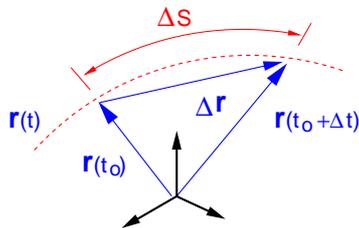
Figura 1.1: Trayectoria de la partícula P descrita mediante su vector de posición $\mathbf{r}(t)$ respecto de un triedro.

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

donde $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\dot{y}(t) = dy/dt$ y $\dot{z}(t) = dz/dt$ serán las componentes del vector velocidad a lo largo de cada eje.

Si introducimos el arco Δs pequeño de la curva (trayectoria) que recorre la partícula durante el tiempo Δt (Fig. 1.2) resulta,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \times \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t},$$



En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ tendremos $\Delta s/\Delta t \rightarrow |\mathbf{v}|$, que es el módulo del vector velocidad y $\Delta \mathbf{r}/|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \boldsymbol{\tau}$, que es un vector unitario ($|\boldsymbol{\tau}| = 1$) tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en todo instante.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \times 1 \times |\mathbf{v}| \rightarrow \mathbf{v} = v \boldsymbol{\tau}$$

Figura 1.2: Arco Δs de la trayectoria de la partícula.

La aceleración de la partícula se calcula derivando de nuevo el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ respecto del tiempo,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

y también podemos obtenerla a partir del vector $\mathbf{v} = v(t) \boldsymbol{\tau}$,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v(t) \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

donde necesitamos calcular la derivada del vector tangente respecto del tiempo,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$$

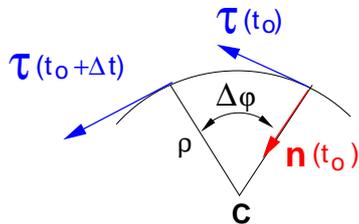


Figura 1.3: Ángulo $\Delta \varphi$ que rota alrededor del punto C el vector unitario tangente $\boldsymbol{\tau}(t)$ durante el pequeño intervalo de tiempo Δt .

Puesto que $\boldsymbol{\tau}$ tiene longitud constante (es unitario) en el curso del movimiento cambia de dirección y sentido. Como indica la Figura 1.3, durante un tiempo Δt pequeño podemos considerar que gira un ángulo $\Delta \varphi$ de modo que el vector diferencia $\Delta \boldsymbol{\tau}$ en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ apuntará en la dirección de la normal a la trayectoria y tendremos,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\tau}}{\Delta \varphi} \times \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

siendo $\Delta\varphi$ el ángulo entre $\boldsymbol{\tau}(t_o)$ y $\boldsymbol{\tau}(\Delta t + t_o)$, luego $\Delta\boldsymbol{\tau}/\Delta\varphi$ es aproximadamente un versor $\mathbf{n}(t_o)$ normal a $\boldsymbol{\tau}(t_o)$, contenido en el plano límite definido por $\boldsymbol{\tau}(t_o)$ y $\boldsymbol{\tau}(t_o + \Delta t)$ y que apunta hacia la concavidad de la curva. Además, el vector $\boldsymbol{\tau}$ y su derivada han de ser perpendiculares puesto que si derivamos,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = 0$$

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ tendremos,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} \rightarrow \frac{v}{\rho} \mathbf{n}(t)$$

y resulta finalmente,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1.1)$$

El primer sumando corresponde a la componente *tangencial* $\mathbf{a}_\tau = (dv/dt) \boldsymbol{\tau}$ del vector aceleración y el segundo es la aceleración *centrípeta* $\mathbf{a}_n = (v^2/\rho) \mathbf{n}$ o *normal* siendo ρ el *radio de curvatura* de la trayectoria¹. Dicha cantidad ρ es una característica geométrica de la trayectoria que corresponde al límite cuando $\Delta s \rightarrow 0$ del cociente $\Delta s/\Delta\varphi$.

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior para la aceleración vectorialmente por \mathbf{v} en ambos lados podemos despejar $\rho = v^3 / |\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}|$ y, como vemos, el valor de ρ es en general diferente en cada punto de la trayectoria ya que depende de la velocidad y aceleración en cada punto de la misma. Obviamente, si el movimiento es circular el radio de curvatura es igual al radio ($\rho = R$) de la circunferencia que describe la partícula y si la trayectoria es una recta ($\rho = \infty$) no existirá aceleración normal. Cuando $\mathbf{a} = 0$ el movimiento es rectilíneo y uniforme, resultando rectilíneo y acelerado cuando $\mathbf{a}_t \neq 0$ y $\mathbf{a}_n = 0$. Si la aceleración tangencial es nula ($\mathbf{a}_t = 0$) y $\mathbf{a}_n \neq 0$ el movimiento será curvilíneo y la trayectoria será un círculo (o una hélice de radio ρ) si además $|\mathbf{a}_n|$ es constante.

1.2. Movimiento circular

Analizaremos el caso sencillo de una partícula P que se mueve sobre un plano describiendo una circunferencia de radio constante $R = |\mathbf{r}(t)|$ como se muestra la Figura 1.4. En todo instante de tiempo su posición $\mathbf{r}(t)$ y velocidad $\mathbf{v}(t)$ estarán contenidas en dicho plano, siendo esta última tangente al círculo de radio R y perpendicular al vector $\mathbf{r}(t)$ como muestra la Fig. 1.4.

Podemos introducir el vector *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}(t)$ perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ de modo que,

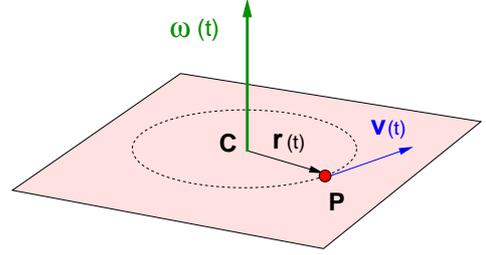
$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{r}(t) \quad (1.2)$$

¹Puede consultarse la sección 5.8, pags. 104 y 105 del Vol I de la Ref. [1].

y si derivamos de nuevo la Ec. 1.2 respecto del tiempo obtenemos para la aceleración,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge [\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{r}(t)] \quad (1.3)$$



La posición de la partícula P puede describirse como

$\mathbf{r}(t) = R \mathbf{u}_r$ empleando un versor unitario $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$ que es perpendicular a la trayectoria de P y que apunta a lo largo de la normal exterior². Puesto que la velocidad es también $\mathbf{v}(t) = v(t) \boldsymbol{\tau}$ y en este caso el vector tangente es justamente el vector $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_\theta$ resulta,

Figura 1.4: Movimiento circular.

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge [R \mathbf{u}_r(t)]$$

y fijando la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ paralela a la del versor $\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}(t)/|\boldsymbol{\omega}(t)|$ resulta,

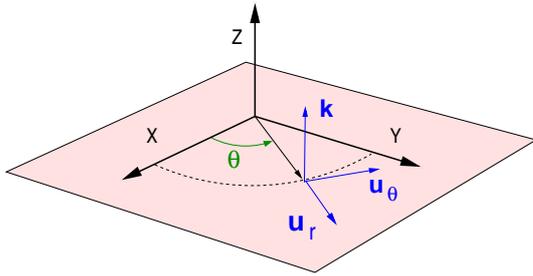
$$|\boldsymbol{\omega}(t)| = v(t)/R.$$

Los tres vectores unitarios $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ forman un triedro como se observa en la Fig. 1.5 que satisface,

$$\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k} \quad \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$$

Tanto la velocidad como la aceleración del movimiento circular pueden expresarse empleando estos vectores que como vemos en la Fig. 1.5 son,

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (1.4)$$



que guardan entre sí las siguientes relaciones,

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$$

Puesto que $\mathbf{r}(t) = R \mathbf{u}_r$ y $\theta(t)$ cambian con el tiempo al derivar resulta,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}[R \mathbf{u}_r(\theta)] = R \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad (1.5)$$

Figura 1.5: Triedro formado por los vectores \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ y para la aceleración, $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}[R \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta] = R \frac{d\dot{\theta}}{dt} \mathbf{u}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = R \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r \quad (1.6)$$

²Este vector está definido en la pag. 87 de la sección *complementos* y también puede consultarse la sección 3.4, pags. 94-97 de la Ref. [2].

Las aceleración centrípeta $\mathbf{a}_c = -R\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r$ apunta hacia el origen C de la circunferencia de la Fig. 1.5. Puede comprobarse que se obtiene el mismo resultado introduciendo en las Ecs. 1.2 y 1.3 los vectores velocidad y aceleración angulares,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \ddot{\theta} \mathbf{k}.$$

y el sentido $\dot{\theta}(t) > 0$ corresponde al del ángulo $\theta(t)$ creciente como observa en la Fig. 1.5.

Por último hay que subrayar que si empleamos el vector normal $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$ como en el movimiento circular $\mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{\tau}$ tendríamos un cambio de signo,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} = \mathbf{n} \quad \text{y}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} = -\boldsymbol{\tau} \quad (1.7)$$

con lo que la aceleración resulta ser $\mathbf{a}(t) = R\ddot{\theta} \boldsymbol{\tau} + R\dot{\theta}^2 \mathbf{n}$ que es el mismo vector que obtuvimos anteriormente.

1.3. Movimiento en un plano

Como se muestra en la Fig. 1.6 podemos generalizar lo anterior para el movimiento de una partícula P que se mueve en un plano describiendo una trayectoria arbitraria.

Puesto que la trayectoria se encuentra contenida en el plano (X, Y) , siempre podemos descomponer el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección del vector \mathbf{u}_r . Hay que subrayar que en general el vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ a la trayectoria de P no será siempre paralelo a \mathbf{u}_θ como en el movimiento circular anterior.

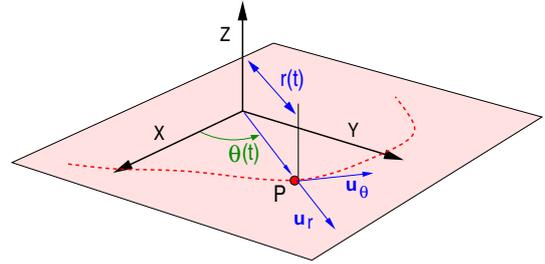


Figura 1.6: Movimiento general de la partícula P cuya trayectoria esta contenida en un plano.

Como se observa en la Fig. 1.7 la velocidad $\mathbf{v}(t)$, paralela al vector tangente \mathbf{t} a la trayectoria, puede descomponerse en su proyección \mathbf{v}_r a lo largo del vector \mathbf{u}_r y su proyección \mathbf{v}_θ a lo largo de la recta AB paralela al vector unitario \mathbf{u}_θ .

Tomando la distancia al origen $r(t)$ tendremos el vector de posición $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{u}_r$ y siendo $\theta(t)$ el ángulo que forma $\mathbf{r}(t)$ con el eje X , derivando respecto del tiempo empleando las Ecs. 1.7,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d}{dt} [r(t) \mathbf{u}_r] = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r(t) \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \\ \mathbf{v}(t) &= \dot{r} \mathbf{u}_r + r(t) \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

Podemos descomponer el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$ en sus componentes *radial* $\mathbf{v}_r = \dot{r} \mathbf{u}_r$ y *angular* $\mathbf{v}_\theta = r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$,

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad (1.8)$$

Para la aceleración, derivando de nuevo esta expresión,

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{r} \mathbf{u}_r + \dot{r} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}$$

resulta,

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \quad (1.9)$$

cuando $r(t) = R$ es constante ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$) recuperamos la velocidad (Ec. 1.5) y aceleración (Ec. 1.6) del movimiento circular. Puesto que \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_θ son siempre ortogonales, la energía cinética de P es,

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

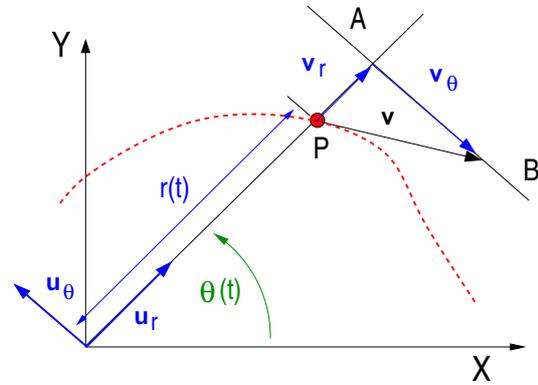


Figura 1.7: Componentes v_r y v_θ de la velocidad de P .

Hemos considerado el movimiento de un punto P respecto de un triedro $S(O, X, Y, Z)$ pero la trayectoria de una misma partícula puede ser descrita desde diferentes sistemas coordenados que se encuentran en movimiento a su vez unos respecto de otros. Nuestro objetivo ahora es encontrar expresiones que relacionen las componentes de la velocidad y aceleración respecto de dos triedros coordenados en movimiento relativo.

En la Fig. 2.1 una partícula P se mueve respecto de dos triedros $S(O, X, Y, Z)$ y $S'(O', X', Y', Z')$. Como muestra la Figura 2.1 su trayectoria ¹ vendría descrita por la evolución en el tiempo de los vectores de posición $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ respecto del triedro S y $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i}' + y'(t)\mathbf{j}' + z'(t)\mathbf{k}'$ respecto de S' .

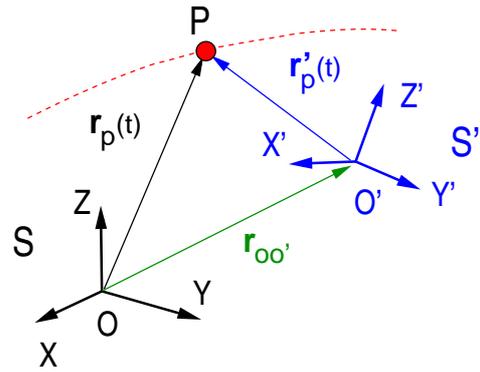


Figura 2.1: La partícula P se mueve respecto de dos triedros S y S' .

Para un observador en S los vectores unitarios $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ permanecen constantes en el tiempo mientras que $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ cambian. La situación inversa se da para un observador que se mueve con S' . Las velocidades $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ de la partícula P en S y $\mathbf{v}'(t) = d\mathbf{r}'/dt$ en S' serán en general diferentes (vease la Fig. 2.1) lo mismo que las aceleraciones $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{a}'(t)$.

En cambio, para ambos observadores en S y S' permanecerán inalteradas las longitudes (módulos) de los vectores. Como se desprende de la figura 2.2, las componentes del vector \mathbf{D}_{ab} que une dos puntos cualesquiera del espacio a y b son diferentes respecto de ambos sistemas coordenados,

$$\mathbf{D}_{ab} = (x_b - x_a)\mathbf{i} + (y_b - y_a)\mathbf{j} + (z_b - z_a)\mathbf{k} = (x'_b - x'_a)\mathbf{i}' + (y'_b - y'_a)\mathbf{j}' + (z'_b - z'_a)\mathbf{k}'.$$

Por el contrario, es igual en ambos triedros el módulo del vector $|\mathbf{D}_{ab}|$, que representa la distancia entre dichos puntos.

¹Para este apartado puede consultarse la sección 7.2, pags. 275-282 de la Ref. [2]

2.1. Derivada de un vector

En general, la derivada respecto del tiempo de un vector cualquiera $\mathbf{q}(t)$ en dos triedros en movimiento relativo S y S' es diferente,

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_S \neq \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_{S'}$$

Si derivamos el vector $\mathbf{q}(t) = q_{x'}(t)\mathbf{i}' + q_{y'}(t)\mathbf{j}' + q_{z'}(t)\mathbf{k}'$ en el triedro S donde $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ varían en el tiempo tendremos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_S &= \frac{dq_{x'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dq_{y'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dq_{z'}}{dt}\mathbf{k}' + \\ &+ q_{x'}\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S + q_{y'}\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S + q_{z'}\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S \end{aligned} \quad (2.1)$$

Los primeros tres sumandos son iguales a $(d\mathbf{q}/dt)_{S'}$ que es la derivada temporal de $\mathbf{q}(t)$ manteniendo constantes los vectores $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Para calcular las derivadas que nos faltan respecto del tiempo de los vectores unitarios $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ en S podemos escribir ²,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S &= a_{11}\mathbf{i}' + a_{12}\mathbf{j}' + a_{13}\mathbf{k}' \\ \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S &= a_{21}\mathbf{i}' + a_{22}\mathbf{j}' + a_{23}\mathbf{k}' \\ \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S &= a_{31}\mathbf{i}' + a_{32}\mathbf{j}' + a_{33}\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde hemos de determinar los seis coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$. Puesto que $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ en todo instante de tiempo, si derivamos respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}') = 0 \implies \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{i}' = 0$$

y en consecuencia $a_{11} = 0$ y repitiendo el mismo argumento para \mathbf{j}' y \mathbf{k}' tendremos $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Además siempre se tiene $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ luego,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}') = 0 \implies \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{k}' = -\mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

de modo que en las Ecs. 2.2 ha de tenerse que $a_{13} = -a_{31}$, y siguiendo la misma argumentación para los productos escalares $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0$ y $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ se obtiene $a_{12} = -a_{21}$ y $a_{23} = -a_{32}$. Sólo

²Véase la sección 7.2, pag. 279 de la Ref. [2]

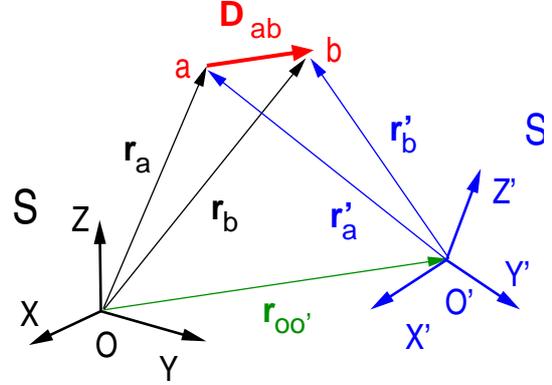


Figura 2.2: El vector D_{ab} respecto de los triedros S y S' .

quedan entonces en las Ecs. 2.2 tres cantidades independientes, a_{23} , a_{31} y a_{12} . Finalmente, si introducimos un vector $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{x'} \mathbf{i}' + \Omega_{y'} \mathbf{j}' + \Omega_{z'} \mathbf{k}'$ donde,

$$\Omega_{x'} = a_{23} \quad \Omega_{y'} = a_{31} \quad \Omega_{z'} = a_{12}$$

las ecuaciones 2.2 pueden escribirse de forma compacta,

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{i}' \quad \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{j}' \quad \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}'$$

y sustituyendo estas expresiones en la Ec. 2.1 llegamos finalmente a la relación general,

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{q} \quad (2.3)$$

El significado físico de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ es justamente el de la velocidad angular del triedro S' respecto de S .

Para la derivada $(d\mathbf{q}/dt)_{S'}$ del vector $\mathbf{q}(t) = q_x(t)\mathbf{i} + q_y(t)\mathbf{j} + q_z(t)\mathbf{k}$ obtendríamos una ecuación simétrica de 2.3,

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_{S'} = \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_S + \boldsymbol{\Omega}_{SS'} \wedge \mathbf{q} \quad (2.4)$$

en donde evidentemente $\boldsymbol{\Omega}_{SS'} = -\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$.

De la ecuaciones 2.3 y 2.4 podemos extraer algunas consecuencias, si particularizamos $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ en la Ec.2.3 tendremos,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_{S'} \quad (2.5)$$

Es decir, la *aceleración angular* es la misma en ambos triedros. Si consideramos tres sistemas coordenados S , S' y S'' aplicando reiteradamente la Ec. 2.3,

$$\boldsymbol{\Omega}_{S''S} = \boldsymbol{\Omega}_{S''S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S}$$

obtenemos una regla de adición de las velocidades angulares relativas.

2.2. Transformación de velocidades y aceleraciones

Como se deduce de la Fig. 2.1 siempre tendremos que $\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}_{o'}(t) + \mathbf{r}'_p(t)$ calculando su derivada temporal

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt} \right)_S$$

y empleando 2.3 haciendo $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}'_p(t)$,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$$

en donde $\mathbf{v}_{o'}$ es la velocidad del origen O' del triedro S' respecto de S y $\mathbf{v}'_p = (d\mathbf{r}'_p/dt)_{S'}$ la velocidad de P respecto de S' y queda finalmente,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p \quad (2.6)$$

Esta última ecuación relaciona las velocidades en S y S' $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}'_p + \mathbf{v}_{arr}$ siendo el término $\mathbf{v}_{arr} = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$ denominado *velocidad de arrastre*.

Podemos repetir el mismo procedimiento para calcular $\mathbf{a}_p(t) = (d\mathbf{v}_p/dt)_S$ empleando de nuevo la Eq. 2.3 con $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}'_p(t)$,

$$\mathbf{a}_p = \left(\frac{d\mathbf{v}_{o'}}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\mathbf{v}'_p}{dt} \right)_S + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o'} + \left[\left(\frac{d\mathbf{v}'_p}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p \right] + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}'_p}{dt} \right)_S$$

y sustituyendo en el último sumando $(d\mathbf{r}'_p/dt)_S = (d\mathbf{r}'_p/dt)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p$ queda finalmente,

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o'} + \mathbf{a}'_p + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \quad (2.7)$$

La aceleración $\mathbf{a}_{o'}$ es la aceleración del origen de S' respecto de S y \mathbf{a}'_p de del punto P en S' . Al término,

$$\mathbf{a}_{arr} = \mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)$$

se le denomina *aceleración de arrastre* y $\mathbf{a}_{cor} = 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p$ es la *aceleración de Coriolis* resultando entonces,

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p + \mathbf{a}_{cor} + \mathbf{a}_{arr}$$

2.3. Aplicaciones

Las ecuaciones 2.6 y 2.7 nos proporcionan los vectores velocidad y aceleración en un triedro S que podemos escribir expresadas en sus componentes en otro triedro S' que se mueve respecto del primero. Veremos a continuación dos ejemplos ilustrativos.

2.3.1. Movimiento circular

Las ecuaciones 1.5 y 1.6 para el movimiento de una partícula que gira con radio R constante pueden obtenerse también como una transformación de velocidades y aceleraciones entre dos triedros coordenados.

En la figura 2.3 se muestran dos triedros con un origen común ($O \equiv O'$) de modo que $\mathbf{v}_{o'} = 0$ y también $\mathbf{a}_{o'} = 0$. El eje Z es paralelo a Z' y la velocidad angular relativa será $\mathbf{\Omega}_{S'S} = \Omega_{S'S} \mathbf{k}'$ que resulta ser siempre paralela además a $\mathbf{\Omega}_{SS'}$.

Un observador en S' observa que la partícula P se encuentra en reposo, ($\mathbf{v}'_p = 0$ y $\mathbf{a}'_p = 0$) en el punto $\mathbf{r}'_p = R \mathbf{i}'$ de modo que según la ecuación 2.6 resulta simplemente,

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p = R \Omega_{S'S} (\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}') \mathbf{v}_p = (R \Omega_{S'S}) \mathbf{j}' \quad (2.8)$$

Empleando la Ec. 2.7 para las aceleraciones con $\mathbf{a}_{o'} = \mathbf{a}'_p = \mathbf{v}'_p = 0$ tendremos,

$$\mathbf{a}_p = \frac{d\mathbf{\Omega}_{S'S}}{dt} \wedge \mathbf{r}'_p + \mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)$$

La aceleración angular se obtiene tomando la derivada de $\mathbf{\Omega}_{S'S}$,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}_{S'S}}{dt} = \frac{d\Omega_{S'S}}{dt} \mathbf{k}' = \dot{\Omega}_{S'S} \mathbf{k}' = \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{k}'$$

por lo que sustituyendo los vectores correspondientes,

$$\mathbf{a}_p = R \dot{\Omega}_{S'S} (\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}') + R \Omega_{S'S}^2 (\mathbf{k}' \wedge [\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}']) = R \dot{\Omega}_{S'S} \mathbf{j}' - R \Omega_{S'S}^2 \mathbf{i}' \quad (2.9)$$

La relación entre las velocidades que nos proporcionan las Ecs. 1.5 ó 2.8 puede observarse en la Figura 2.3. Para un observador en el triedro S que ve girar la partícula P el vector velocidad, $\mathbf{v}_p = R \dot{\Omega}_{S'S} \mathbf{u}_\theta$, resulta ser igual al vector $\mathbf{v}_p = R \Omega_{S'S} \mathbf{j}'$ que nos proporciona la Ec. 2.6. Ambas expresiones corresponden al mismo vector \mathbf{v}_p puesto que

$$\mathbf{j}' = \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

. La diferencia estriba que las componentes de \mathbf{v}_p están referidas al triedro S en el primer caso y a S' en el otro.

Podemos repetir la misma argumentación para el vector aceleración \mathbf{a}_p que arroja la Ec. 2.9 y que obtuvimos en la Ec. 1.6. El vector \mathbf{i}' resulta ser siempre igual a $\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ y por lo tanto la aceleración centrípeta $\mathbf{a}_c = -(R \Omega_{S'S}^2) \mathbf{i}'$ resulta en todo instante paralela al vector normal \mathbf{n} que apunta hacia el origen O .

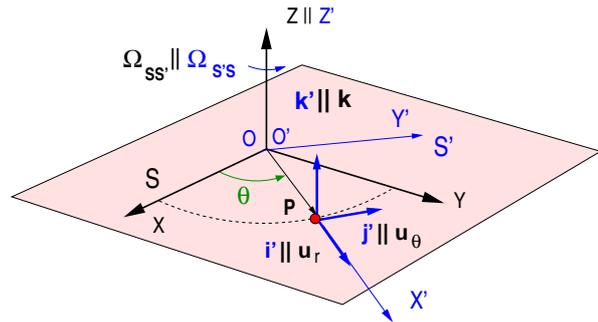


Figura 2.3: Movimiento circular de una partícula P en reposo en $\mathbf{r}'_p = R \mathbf{i}'$ respecto de S' que a su vez gira respecto del triedro S .

Como vemos, los vectores velocidad y aceleración en S son los mismos siempre aunque pueden ser expresados en sus componentes a lo largo de los vectores unitarios $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ respecto del triedro S o también en sus componentes respecto de S' empleando entonces el triedro $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$.

2.3.2. Movimiento de un sólido rígido

En el apartado anterior consideramos un triedro móvil S' respecto del cual una partícula se encontraba en reposo. Este es también el caso de un sólido ideal indeformable (rígido) que es aquel en el que las distancias relativas entre sus $\alpha = 1, \dots, N$ partículas no cambian en el tiempo. Si consideramos un triedro S' que se mueve con el sólido respecto del cual para todas sus partículas α se tiene que $\mathbf{v}'_\alpha = \mathbf{a}'_\alpha = 0$, empleando las Ecs. 2.6 y 2.7 tendremos,

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_\alpha, \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \wedge \mathbf{r}'_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_\alpha)$$

El movimiento del cuerpo se compone de una velocidad de traslación $\mathbf{v}_{O'}$ común para todos los puntos y un giro con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ alrededor de un eje O' .

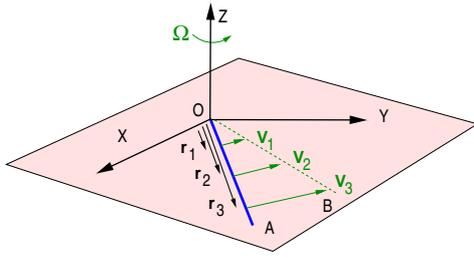


Figura 2.4: Movimiento de una barra $|\overline{OA}|$.

Ejemplo: Vamos a considerar una barra $|\overline{OA}|$ que en un cierto instante t_0 gira sobre un plano con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ alrededor de su extremo como se indica en la Fig. 2.4.

Respecto del origen O la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma para todos los puntos de la barra aunque la *velocidad de cada partícula de la misma* es diferente. En la figura 2.4 se han dibujado solamente los tres vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y \mathbf{v}_3 correspondientes a los puntos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ y \mathbf{r}_3 .

No obstante, es evidente que para cada posición \mathbf{r}_α a lo largo de la barra $|\overline{OA}|$ existe un vector velocidad $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_\alpha$ cuyo extremo se encontrará a lo largo de la recta a trazos $|\overline{OB}|$. Es decir, la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sólido es única pero no las velocidades \mathbf{v}_α de cada una de sus partículas.

Además, todas las velocidades respecto de S de cada punto del sólido se encuentran ligadas, si a \mathbf{r}_1 le sumamos y restamos el vector \mathbf{r}_2 se tiene, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y entonces,

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Como vemos las velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 de ambos puntos se encuentran relacionadas.

Existe una *única velocidad angular* $\boldsymbol{\Omega}$ para todas las partículas del sólido pero sus velocidades \mathbf{v}_α respecto de S son diferentes. La velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{SS'}$ coincide con la de un triedro S' que se mueve con el mismo y respecto del cual todas las partículas α se encuentran en reposo. Las velocidades de dos partículas cualesquiera situadas en los puntos \mathbf{r}_α y \mathbf{r}_β se encuentran relacionadas mediante,

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\beta + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)$$

y constituyen el denominado *campo de velocidades* del sólido rígido.

CAPÍTULO 3

Dinámica de una partícula

La *cinemática* estudia el movimiento de los cuerpos sin preguntarse por las causas del mismo. Las observaciones nos indican que el movimiento de un cuerpo es el resultado de su interacción con otros cuerpos que le rodean y para describir dichas interacciones introducimos el concepto de *fuerza*. La *dinámica* es el estudio de la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas del mismo: las fuerzas.

3.1. Leyes de Newton

La dinámica clásica esta fundamentada en las leyes del movimiento de Newton que pueden considerarse como *axiomas*, es decir, generalizaciones que no tienen demostración, fruto del análisis de los movimientos que observamos de los cuerpos y de la extrapolación de dichas observaciones. Su validez queda establecida en la medida en que los movimientos que predicen se corresponden con los que observamos en la Naturaleza.

La situación físicamente más simple corresponde a una *partícula aislada* que es aquella que no interactúa con el resto del universo. Se trata de una idealización, y podremos considerar que una partícula está aislada, bien cuando sus interacciones con las demás se cancelan, o bien porque decaen con la distancia y se encuentra muy alejada.

- **1ª Ley de Newton** : Se postula la existencia de ciertos triedros, que denominaremos *inerciales*, respecto de los cuales las partículas aisladas tienen aceleración nula, por lo que su *cantidad de movimiento*, definida como el producto $\mathbf{p} = m_p \mathbf{v}_p$, es constante (*Ley de inercia*).

Respecto de un triedro inercial una partícula no sometida a ninguna fuerza se mueve con velocidad uniforme y rectilínea, su velocidad \mathbf{v}_p es un vector constante en el tiempo. Como se deduce de las Ecs. 2.6 y 2.7 si un triedro S es inercial, cualquier otro S' con $\mathbf{a}_{o'} = 0$, $\mathbf{\Omega}_{S'S} = 0$ y $d\mathbf{\Omega}_{S'S}/dt = 0$ también es inercial, resultando iguales las aceleraciones $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p$ que experimenta la partícula en ambos sistemas. Para las velocidades tendremos $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_p$.

- **2ª Ley de Newton** : Para una partícula *no* aislada se puede escribir en un triedro inercial $\mathbf{a}_p = \mathbf{F}/m_p$ donde el vector \mathbf{F} llamado *fuerza* depende de la interacción de la partícula con los objetos que se encuentran en su proximidad. El escalar $m_p > 0$ es la *masa inercial* de la partícula y tendremos,

$$\mathbf{F} = m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \quad (3.1)$$

Si utilizamos la Ec. 2.7 encontramos que si S y S' son dos triedros inerciales las aceleraciones –y por lo tanto la fuerza \mathbf{F} – que se observa en ambos triedros son las mismas. La segunda ley de Newton también se puede enunciar asimismo de la forma,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Es decir, que la fuerza produce la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento $\mathbf{p} = m_p \mathbf{v}_p$ de la partícula.

- **3ª Ley de Newton** : Respecto de un triedro inercial, para una pareja de partículas cualesquiera i y j aisladas del resto del universo se observa que,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

o equivalentemente $m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j = 0$ (*Ley de acción y reacción*).

Si el sistema formado por las dos partículas está aislado, la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la que ejerce la otra. Equivalentemente, podemos decir que la cantidad de movimiento $\mathbf{P} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j$ del sistema aislado formado por las dos partículas se conserva,

$$m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0.$$

3.2. Fuerzas

La segunda ley de Newton (Ec. 3.1) nos proporciona una *ecuación diferencial* cuya solución $\mathbf{r}_p(t)$ es la trayectoria de la partícula P . Para plantear dicha ecuación es preciso encontrar expresiones matemáticas para las interacciones entre las partículas, es decir, funciones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ para las fuerzas que dependen de la velocidad \mathbf{v} , la posición \mathbf{r} y el tiempo t . Además, para determinar exactamente la solución correcta es preciso conocer la *velocidad* $\mathbf{v}_p(t_o)$ y la posición $\mathbf{r}_p(t_o)$ de la misma en un instante t_o dado.¹

El estudio de las diferentes fuerzas que existen en el universo y la determinación de sus expresiones matemáticas es uno de los objetivos de la Física. Brevemente vamos a describir los diferentes tipos de fuerza con que trabajaremos a lo largo del curso y que podemos clasificar en tres grupos. Las *interacciones* o acciones a distancia entre dos cuerpos donde intervienen propiedades fundamentales de la materia como la masa o la carga eléctrica, las fuerzas *macroscópicas* o de *contacto*, como el rozamiento o las reacciones de apoyos, que son el resultado de las interacciones entre el gran número de partículas (átomos) que componen los cuerpos materiales y finalmente, las fuerzas de *inercia* que dependen del estado de movimiento del observador.

¹Se desarrolla esta cuestión mediante un ejemplo en la página 88.

3.2.1. Interacciones

3.2.1.1. Campo gravitatorio

Como se observa en la Fig. 3.1 entre dos masas puntuales m y M aparece una fuerza de atracción. La fuerza \mathbf{F}_{mM} que experimenta la partícula de masa m debida a su interacción gravitatoria con la de masa M viene dada por,

$$\mathbf{F}_{Mm} = -G \frac{mM}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^2} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|} \quad (3.2)$$

en donde el vector $\mathbf{u}_{Mm} = (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)/|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|$ es un vector unitario con origen en M en la dirección de la recta que une a ambas partículas.

La constante de gravitación universal G en el sistema MKS vale, $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Evidentemente se tendrá $\mathbf{F}_{Mm} = -\mathbf{F}_{mM}$ y la fuerza resultante sobre una partícula de masa m_β debida a un conjunto de masas m_α donde $\alpha = 1, \dots, N$ es la suma vectorial de la fuerza que ejerce cada una de ellas individualmente.

$$\mathbf{F}_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N -G \frac{m_\beta m_\alpha}{|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha|}$$

Se define el vector *intensidad* del campo gravitatorio $\mathbf{f}_M(\mathbf{r})$ creado por la masa M como la fuerza que ésta ejerce sobre la unidad de masa situada en el punto \mathbf{r} ,

$$\mathbf{f}_M(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \quad (3.3)$$

y la fuerza sobre una masa m situada en el punto \mathbf{r} será, $\mathbf{F}_{Mm} = m \mathbf{f}_M(\mathbf{r})$. Para un sistema de $\alpha = 1, \dots, N$ partículas de masas M_α la intensidad de campo gravitatorio en el punto \mathbf{r} será la suma vectorial,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N (-G) \frac{M_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}$$

En la expresión de ley de gravitación aparecen las *masas gravitatorias* m y M que –en principio– no tienen porqué ser iguales a las *masas inerciales* correspondientes que aparecen en la segunda ley de Newton (Ec. 3.1). Sin embargo, ningún experimento realizado hasta la fecha ha encontrado discrepancia alguna entre ambos valores por lo que se considerarán idénticos en el resto del texto.

Para una masa m situada a una altura h sobre la superficie de la tierra (de masa M_T y radio R_T) podemos hacer una aproximación tomando $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T| = h + R_T$ y desarrollar en potencias de h/R_T ,

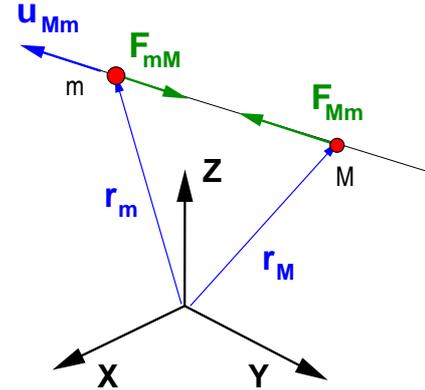


Figura 3.1: Interacción gravitatoria entre dos masas m y M .

$$F_g = -G \frac{m M_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|^2} = -G \frac{m M_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}$$

$$F_g \simeq -mg \left[1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T} \right)^2 - 4 \left(\frac{h}{R_T} \right)^3 + \dots \right]$$

en donde $g = GM_T/R_T^2 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ y podemos aproximar² $F_g = mg$ siempre que $h/R_T \ll 1$.

3.2.1.2. Campo electromagnético

Entre dos cargas eléctricas q y Q aparecen fuerzas de la que es responsable la *interacción electromagnética*. La *fuerza de Coulomb* \mathbf{F}_{Qq} que ejerce la carga Q sobre la q es atractiva ($Qq < 0$) o repulsiva ($Qq > 0$) dependiendo del signo de las cargas (ver la Fig. 3.1 reemplazando las masas M y m por las cargas correspondientes) que viene dada por,

$$\mathbf{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{qQ}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|^2} \frac{(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q)}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q|} \quad (3.4)$$

en donde $\epsilon_o > 0$ es una constante positiva y $1/4\pi\epsilon_o \simeq 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.

Análogamente al campo gravitatorio se define el vector *campo eléctrico* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ originado por la carga Q como la fuerza que se ejerce sobre la carga unidad en el punto \mathbf{r} ,

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \quad (3.5)$$

de modo que la carga q situada en el punto \mathbf{r} será $\mathbf{F}_{Qq} = q\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$. Para un conjunto de $\alpha = 1, \dots, N$ cargas tendremos como para el campo gravitatorio una suma vectorial,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{\alpha=1}^N \frac{Q_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}$$

y la fuerza sobre la carga q_β situada en el punto \mathbf{r} será $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q_\beta \mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v}_q respecto de un campo magnético también experimenta una fuerza que viene dada por,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}_q \wedge \mathbf{B})$$

donde \mathbf{B} es el vector *inducción magnética* que mide la intensidad del campo. En esta expresión la velocidad \mathbf{v}_q de la carga se mide respecto de un triedro en el que el campo \mathbf{B} permanece en reposo de modo que,

$$\mathbf{F}_q = q[\mathbf{E} + \mathbf{v}_q \wedge \mathbf{B}]$$

es la fuerza que experimenta una carga q que se mueve en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} y otro magnético \mathbf{B} superpuestos y que se denomina *fuerza de Lorentz*.

²Sobre los desarrollos en serie de potencias de una función puede consultarse la Pag. 90.

3.2.2. Fuerzas macroscópicas

3.2.2.1. Reacciones

Los cuerpos de nuestro entorno interactúan a través las últimas capas de átomos que constituyen sus superficies exteriores. Cuando estas se encuentran lo suficientemente próximas aparecen fuerzas macroscópicas que resultan del promedio de las interacciones a nivel molecular entre los átomos de sus superficies. Dichas fuerzas son de corto alcance, es decir, disminuyen rápidamente con la distancia de separación y se denominan *fuerzas de contacto* puesto que podemos considerar que sólo actúan sobre los cuerpos macroscópicos cuando sus superficies están en contacto físico.

3.2.2.2. Fuerza de rozamiento

La *fuerza de rozamiento o fricción por deslizamiento* es una fuerza de contacto que se opone al movimiento relativo de dos cuerpos macroscópicos. Su dirección se encuentra contenida en el plano tangente a las superficies en contacto y se verifica experimentalmente que la magnitud su módulo es $F_R = \mu N$ donde N es la fuerza de reacción entre ambos cuerpos. Cumple las siguientes propiedades,

- No depende de la magitud de la superficie de contacto, sino de la naturaleza de las superficies.
- Es proporcional a la reacción normal N entre ambos cuerpos.
- Al coeficiente de proporcionalidad μ se le denomina *coeficiente de rozamiento*

La dirección de la fuerza de rozamiento F_R será contraria a la velocidad v del cuerpo,

$$\mathbf{F}_r = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (3.6)$$

Se emplea el *coeficiente de rozamiento estático* $\mu = \mu_e$ cuando los dos cuerpos en contacto se encuentran inicialmente en reposo relativo y F_r representa la fuerza mínima necesaria para ponerlos en movimiento ³.

Si los cuerpos se encuentran en movimiento se utiliza el *coeficiente de rozamiento dinámico o cinético* $\mu = \mu_d$ cuyo valor en general es menor que el estático ($\mu_d < \mu_e$), y que representa la fuerza necesaria para mantener dichos cuerpos en movimiento uniforme relativo.

Finalmente, un cuerpo que se mueve con velocidad relativamente baja a través de un fluido como un gas o un líquido experimenta una fuerza de fricción F proporcional a su velocidad relativa al medio,

$$\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v} \quad (3.7)$$

El coeficiente de proporcionalidad $\gamma > 0$ depende de la forma del cuerpo y del medio en que se mueve.

³Puede consultarse la sección 7.9, pags 170-173 Vol I de la Ref. [1] y la sección 2.4 pags. 32-33 de [2].

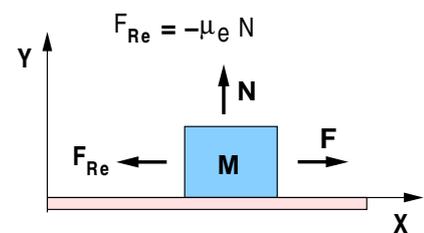


Figura 3.2: Fuerza de rozamiento estático.

3.2.2.3. Fuerza de un muelle

El movimiento oscilatorio sin rozamiento en una dimensión de una partícula (por ejemplo el bloque que se muestra en la Fig. 3.3) unida a un muelle ideal se describe mediante la *ley de Hooke*,

$$F_m = -K(x - L_o)$$

donde K se denomina *constante elástica* y L_o es la *longitud natural* del muelle que corresponde a la posición $x = L_o$ donde la fuerza es nula, resultando $F > 0$ para $x < L_o$ y $F < 0$ si $x > L_o$.

La ecuación de movimiento de la masa m es,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -K(x - L_o) \quad (3.8)$$

y su movimiento será oscilatorio, su estudio detallado se efectuará en el capítulo 7.

3.2.3. Fuerzas de inercia

Para la partícula P de masa m , si consideramos un triedro inercial S y otro S' tales que su velocidad relativa $\mathbf{v}_{o'}(t)$ no es constante en el tiempo (y/o $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}(t) \neq 0$) tendremos $\mathbf{F}_p = m \mathbf{a}_p$ y empleando la Ec. 2.7 resulta,

$$\mathbf{F}_p = m \left[\mathbf{a}'_p + \mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \right]$$

Las fuerzas observadas sobre la partícula P en el sistema S' serán $\mathbf{F}'_p = m \mathbf{a}'_p$ despejando,

$$\mathbf{F}'_p = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_I$$

en donde \mathbf{F}_I son las *fuerzas de inercia*,

$$\mathbf{F}_I = -m \left[\mathbf{a}_{o'} + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_{S'S}}{dt} \right)_S \wedge \mathbf{r}'_p + 2\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p) \right] \quad (3.9)$$

Las fuerzas de inercia dependen de la posición \mathbf{r}'_p en S' y del movimiento relativo entre ambos triedros y el término $\mathbf{F}_{cor} = -2m(\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}'_p)$ será la *fuerza de Coriolis*.

La fuerza centrífuga $\mathbf{F}_c = -m[\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_p)]$ se dirige siempre en la dirección perpendicular al vector $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$. Si descomponemos la posición $\mathbf{r}'_p = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$ de la partícula en sus componentes perpendicular \mathbf{r}'_{\perp} y paralela \mathbf{r}'_{\parallel} a la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$, puesto que $\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_{\parallel} = 0$, la fuerza centrífuga viene dada siempre por,

$$\mathbf{F}_c = -m[\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_{\perp})] = m \Omega_{S'S}^2 r'_{\perp} \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} \quad (3.10)$$

Como se muestra en la Fig. 3.4, el vector unitario $\mathbf{r}'_{\perp}/r'_{\perp}$ apunta en la dirección perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ con sentido hacia afuera del eje de giro.

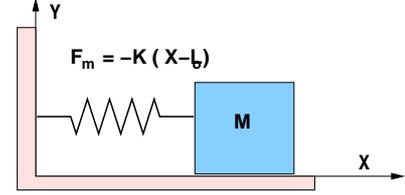


Figura 3.3: Fuerza de un muelle sobre un bloque de masa M .

Si consideramos el movimiento respecto de un triedro de referencia S' *no inercial* en la segunda ley de Newton (Ec. 3.1) hemnos de considerar además las fuerzas de inercia \mathbf{F}_I . Respecto del triedro S' la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ de una masa m puntual será entonces la solución de la ecuación diferencial,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_I \quad (3.11)$$

donde \mathbf{F} son fuerzas independientes del estado de movimiento del observador (por ejemplo, la gravedad) y \mathbf{F}_I las fuerzas de inercia.

3.2.4. El triedro terrestre

De la expresión de la ley de gravitación (Ec. 3.2) se desprende que su magnitud es pequeña comparada con la fuerza de Coulomb (Ec. 3.4) entre dos cargas eléctricas, además ambas decrecen con el inverso del cuadrado de la distancia. En dicho triedro las fuerzas de inercia (Ec. 3.9) son despreciables.

Por el contrario, la tierra gira alrededor del sol y también alrededor de su eje de rotación con velocidades angulares Ω_T y Ω_{dia} respectivamente, por lo que un triedro S_T con origen en el centro de la tierra y ligado a la misma no es un sistema de referencia inercial.

Para los movimientos sobre la superficie terrestre la gravedad $\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}$ es obviamente más intensa que la fuerza de atracción experimenta debida a cualquier otro objeto del universo. En consecuencia, para un observador en S_T según la ecuación 3.9 la gravedad no es la única fuerza que actúa sobre una partícula de masa m sino que hemos de evaluar también los siguientes términos,

$$-m\mathbf{a}_T, \quad -m \frac{d\Omega_{dia}}{dt} \wedge \mathbf{r}'_p \quad -2m\Omega_{dia} \wedge \mathbf{v}'_p, \quad y \quad -m\Omega_{dia} \wedge (\Omega_{dia} \wedge \mathbf{r}'_p).$$

El período de rotación de la tierra será $T = (24 \text{ h} \times 60 \text{ m} \times 60 \text{ s}) = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$ de modo que $\Omega_{dia} = 2\pi/T = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ y la velocidad angular de la órbita alrededor del sol será $\Omega_T = \Omega_{dia}/365 = 2,0 \times 10^{-7} \text{ rads}^{-1}$. La aceleración \mathbf{a}_T es la aceleración del centro de la tierra en su órbita en torno al sol (el término $\mathbf{a}_{\mathcal{O}'}$ en la ecuación 3.9). Si $D = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ es la distancia aproximada tierra-sol tendremos,

$$|\mathbf{a}_T| \simeq \Omega_T^2 D = 6 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}.$$

No hemos de considerar para el segundo término donde $d\Omega_{dia}/dt$ es obviamente despreciable y tomando el radio de la tierra $R_T = 6400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ resulta,

$$|\Omega_{dia} \wedge (\Omega_{dia} \wedge \mathbf{R}_T)| \leq \Omega_{dia}^2 R_T \simeq 3,6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

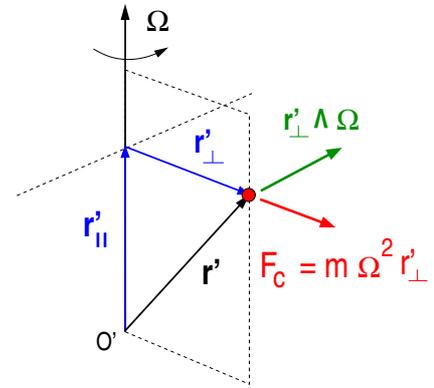


Figura 3.4: Fuerza centrífuga $\mathbf{F}_c = m\Omega^2 \mathbf{r}_\perp$ sobre una partícula.

Si comparamos con el valor de la aceleración de la gravedad terrestre ⁴ $g = 9,7805 \text{ ms}^{-2}$ podemos ver que las correcciones que introducen son pequeñas,

$$\frac{\Omega_{dia}^2 R_T}{g} \simeq 4 \times 10^{-3} \quad \text{y} \quad \frac{\Omega_T^2 D}{g} \simeq 6 \times 10^{-4}$$

respectivamente. La importancia de la fuerza de Coriolis dependerá de la velocidad \mathbf{v}_p relativa a la superficie terrestre que tendría que ser elevada para compensar el bajo valor de $\Omega_{dia} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$. Si tomamos por ejemplo la velocidad del sonido $v_p = 340 \text{ ms}^{-1}$ entonces,

$$a_{cor} = 2 \left| \boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge \mathbf{v}'_p \right| \leq 5 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$$

incluso en este caso resulta en una cantidad pequeña comparada con la aceleración de la gravedad terrestre.

Podemos concluir que un triedro S' ligado a la superficie de la tierra puede considerarse como inercial para la mayor parte de los movimientos de los objetos de nuestra vida diaria. Las correcciones debidas a las aceleraciones centrífuga o de Coriolis son relevantes si las distancias sobre la superficie terrestre son muy grandes o los períodos de los movimientos implicados muy lentos, de modo que sus efectos se acumulen a lo largo del tiempo, como es el caso del movimiento del péndulo de *Focault*.

En la Fig. 3.5 consideramos dos triedros S y S' ambos tienen su origen en el centro de la tierra y los ejes de S apuntan a lo largo de direcciones fijas en el espacio. El triedro S' rota respecto de S girando con la tierra con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{dia} = \Omega_{dia} \mathbf{k}'$. La fuerza \mathbf{F}'_p que experimenta una partícula P situada a la altura h sobre la superficie terrestre será,

$$\mathbf{F}'_p = \mathbf{F}_g - m \left[2 \boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge \mathbf{r}'_p) \right]$$

y consideraremos por simplificar la velocidad $\mathbf{v}'_p = v'_p [\cos(\varphi) \mathbf{i}' + \sin(\varphi) \mathbf{k}']$ contenida en el plano (X', Z') . Asimismo, $\mathbf{r}'_p = (R_T + h) \mathbf{u}'_r = (R_T + h) [\cos(\theta) \mathbf{i}' + \sin(\theta) \mathbf{k}']$ y la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g = -mg \mathbf{u}'_r$ es la misma en S y S' . La fuerza centrífuga resulta,

$$\mathbf{F}_{cent} = -m (R_T + h) \boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge \mathbf{u}'_r) = m (R_T + h) \Omega_{dia}^2 \cos(\theta) \mathbf{i}'$$

como indica la figura y la de Coriolis,

$$\mathbf{F}_{cor} = -2m \boldsymbol{\Omega}_{dia} \wedge \mathbf{v}'_p = -2m \Omega_{dia} v'_p \cos(\varphi) \mathbf{j}'$$

resulta ser perpendicular al plano (X', Z') dirigida hacia el lector por lo que no está dibujada en la Fig. 3.5. La fuerza total que se observa sobre P en S' es finalmente,

$$\mathbf{F}'_p = -mg \mathbf{u}'_r + m (R_T + h) \Omega_{dia}^2 \cos(\theta) \mathbf{i}' - 2m \Omega_{dia} v'_p \cos(\varphi) \mathbf{j}'$$

Como vemos además del peso \mathbf{F}_g hay otras componentes que dependen de los ángulos θ (latitud) y φ que en algunos casos pueden ser nulas. Obviamente no existe fuerza centrífuga

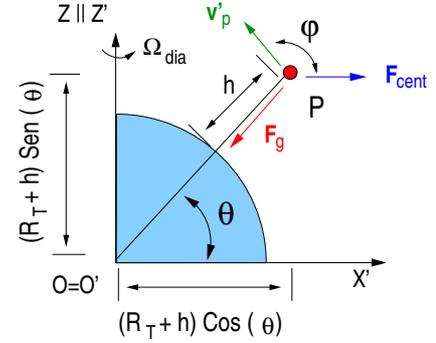


Figura 3.5: El triedro S' gira con la tierra.

⁴Valor de referencia medido a nivel del mar en el ecuador terrestre.

para $\theta = \pi/2$ (el polo), máxima en el ecuador ($\theta = 0$) y la de Coriolis es nula si $\varphi = \pi/2$ y máxima cuando $\varphi = 0$.

3.3. Trabajo y energía

Se define el trabajo⁵ dW efectuado por la fuerza \mathbf{F} sobre la partícula P que se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ como el producto escalar,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \theta \quad (3.12)$$

El significado geométrico se aprecia en la Fig. 3.6, la cantidad dW representa la proyección $|\mathbf{F}| \cos(\theta)$ de la fuerza a lo largo del vector $d\mathbf{r}$. Es decir, solo la componente de la fuerza \mathbf{F} tangencial (paralela al vector $d\mathbf{r}$) realiza trabajo.

Entre dos puntos a y b cualesquiera de la trayectoria definidos por los vectores \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b tendremos,

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} dW = W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Donde aparece la *integral de línea*⁶ de la fuerza \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ entre los puntos considerados.

Considerando la 2ª ley de Newton en lugar de la fuerza como $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$,

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \cdot (\mathbf{v} dt) = \frac{m}{2} \int_{\mathbf{v}_a}^{\mathbf{v}_b} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

si \mathbf{v}_a y \mathbf{v}_b son las velocidades de la partícula en los puntos considerados,

$$W_{ab} = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \Delta E_{cin} \quad (3.13)$$

Por consiguiente, el trabajo W_{ab} de las fuerzas aplicadas sobre la partícula entre los puntos a y b es igual a la variación de la energía cinética ΔE_c entre dichos puntos.

Si derivamos respecto del tiempo la energía cinética obtenemos la *potencia*,

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.14)$$

que representa el trabajo efectuado en la unidad de tiempo. Cuando este producto escalar sea nulo E_c es constante en el tiempo y se conservará la energía cinética; sólo efectúa trabajo sobre la partícula la componente de la fuerza paralela al vector velocidad, es decir, a la tangente a la trayectoria de la partícula.

Hay que subrayar que las Ecs. 3.12, 3.13 y 3.14 no hemos especificado si el triedro respecto del que describimos el movimiento es inercial o no inercial. Con la notación habitual podríamos sustituir en ellas la fuerza \mathbf{F}' , posición \mathbf{r}' y velocidad \mathbf{v}' en S' y encontraríamos el trabajo W'

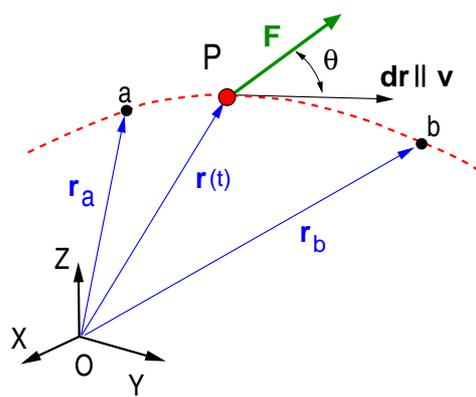


Figura 3.6: Solo la componente de la fuerza \mathbf{F} paralela a $d\mathbf{r}(t)$ realiza trabajo.

⁵Puede consultarse el capítulo 8 del Vol I de la Ref. [1], pags. 201-233

⁶Una introducción de este concepto se encuentra en la pag. 95.

en el triedro S' . Si el triedro es *no inercial* hay que considerar además el trabajo de las fuerzas de inercia, en este caso tendremos,

$$\int_{\mathbf{r}'_b}^{\mathbf{r}'_a} dW' = W'_{ab} = \int_{\mathbf{r}'_b}^{\mathbf{r}'_a} \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r}'$$

donde hemos de substituir $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_I$.

$$\Delta E'_c = \left[\frac{m\mathbf{v}'^2}{2} \right]_a^b = \int_{\mathbf{r}'_a}^{\mathbf{r}'_b} (\mathbf{F} + \mathbf{F}_I) \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}'_a}^{\mathbf{r}'_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r}'_a}^{\mathbf{r}'_b} \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{r}' = W_F + W_I \quad (3.15)$$

Entonces $\Delta E'_c = W_F + W_I$ donde el primer sumando corresponde al trabajo W_F de las fuerzas calculado igual que en la definición (Ec. 3.12) pero evaluado a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ respecto del triedro S' . El segundo es el *el trabajo efectuado por las fuerzas de inercia* W_I y la suma de ambos es igual la variación de la energía cinética de la partícula en el triedro S' donde –como ya hemos visto– la fuerza de Coriolis no contribuye a W_I .

En el caso de la fuerza de Coriolis, es nulo el producto escalar de la fuerza \mathbf{F}_{cor} por la velocidad de la partícula \mathbf{v}' en el triedro S' ,

$$\mathbf{F}_{cor} \cdot \mathbf{v}' = -2m(\boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v}' = 0$$

No hace trabajo puesto que \mathbf{F}_{cor} es siempre perpendicular a la velocidad \mathbf{v}' .

3.4. Fuerzas conservativas

Podemos aplicar la definición de trabajo 3.12 a lo largo de una trayectoria que forme una curva cerrada C en el espacio de modo que los puntos inicial a y final b son el mismo y escribimos,

$$W_{ab} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Cuando a lo largo de *cualquier* curva cerrada C en el espacio se cumple que,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

decimos que la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es *conservativa* y puede probarse que entonces existe una función escalar ⁷ $E_p(x, y, z)$ tal que $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. La integral a lo largo de la curva C es nula puesto que la función $E_p(\mathbf{r})$ toma evidentemente el mismo valor en el punto inicial y final de la curva. Escribimos entonces $\mathbf{F} = -\nabla E_p$ donde E_p es la *energía potencial* y el vector ∇E_p se denomina *gradiente* de la función $E_p(\mathbf{r})$ ⁸.

En general, la energía potencial esta definida salvo una constante arbitraria que no influye, puesto que en el cálculo de \mathbf{F} desaparece al derivar, o bien al calcular la diferencia de energías potenciales entre dos puntos $\Delta E_p = E_p(\mathbf{r}_b) - E_p(\mathbf{r}_a)$. Como veremos a continuación para los

⁷Es aconsejable repasar los conceptos de *campo escalar* y *vectorial* que se introducen brevemente en la Pag. 93.

⁸El concepto de derivada parcial y gradiente puede encontrarse en la Pag. 97.

campos eléctrico y gravitatorio dicha constante se establece de modo que la energía sea nula en el límite $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, es decir, para puntos alejados de la carga eléctrica (o masa) que crea dicho campo.

Entre dos puntos a y b cualesquiera de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$,

$$-\Delta E_p = -[E_p(\mathbf{r}_b) - E_p(\mathbf{r}_a)] = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} -dE_p = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta E_c \quad (3.16)$$

y podemos definir la energía mecánica $E = E_c + E_p$ de la partícula como suma de su energía potencial y cinética,

$$E = \frac{mv_a^2}{2} + E_p(\mathbf{r}_a) = \frac{mv_b^2}{2} + E_p(\mathbf{r}_b)$$

Cuando la energía E se conserva $\Delta(E_c + E_p) = cte.$ será una cantidad constante que toma el mismo valor en todos los puntos de la trayectoria.

3.4.1. Energía potencial elástica

A partir de la ley de Hooke $F_m = -K(x - L_o)$ se obtiene la energía potencial elástica del muelle $E_m(x) = K(x - L_o)^2/2$. Como vemos en la Fig. 3.3 si tomamos dos puntos cualesquiera a y b a lo largo del eje X y empleamos la Ec. 3.12 resulta,

$$W_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-K) \int_{x_a}^{x_b} (x - L_o) dx = - \left[\frac{K(x_b - L_o)^2}{2} - \frac{K(x_a - L_o)^2}{2} \right]$$

y utilizando $\Delta E_c = -\Delta E_m$ (Ec. 3.16) podemos definir la energía de la masa m ,

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{K(x - L_o)^2}{2}$$

que es una constante en cada punto de la trayectoria $x(t)$. En cualquier instante t la suma de la energía cinética y potencial elástica del muelle es una cantidad conservada.

También puede deducirse de la ecuación de movimiento (Ec. 3.8) para la masa m unida a un muelle ideal en una dimensión. Tendremos,

$$m\ddot{x} = -K(x - L_o) \quad \text{luego,} \quad m\dot{x}\ddot{x} = -K(x - L_o)\dot{x}$$

multiplicando por la velocidad \dot{x} . Podemos integrar entre dos instantes de tiempo $t_a < t_b$ consecutivos,

$$\left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 \right]_{t_a}^{t_b} = - \left[\frac{K}{2} (x - L_o)^2 \right]_{t_a}^{t_b}$$

El término de la izquierda es justamente la variación de la energía cinética ΔE_c y el de la derecha es $-\Delta E_p$. La energía potencial elástica $E_m(x)$ es la función,

$$E_m(x) = \frac{K}{2}(x - L_o)^2 + C$$

en donde C es una constante que puede determinarse tomando $E_m(L_o) = 0$. Para cualquier valor de C tendremos siempre $\Delta E_m = E_m(x_b) - E_m(x_a)$ y la fuerza del muelle se recupera calculando el gradiente⁹ del potencial,

$$\mathbf{F}_m = -\nabla E_m = -\frac{dE_m}{dx}\mathbf{i} = -K(x - L_o)\mathbf{i}$$

y resulta independiente de la elección de C .

Si existe una fuerza adicional F_x aplicada la ecuación del movimiento sería,

$$m\ddot{x} + K(x - L_o) = F_x \quad \text{ahora,} \quad m\dot{x}\ddot{x} + K(x - L_o)\dot{x} = F_x\dot{x}$$

e integrando igual que antes resulta,

$$\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2\right]_{t_a}^{t_b} + \left[\frac{K}{2}(x - L_o)^2\right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} F_x dx = W_f$$

El término de la izquierda es la suma de ΔE_c y $\Delta E_m(x)$ y a la derecha aparece el *trabajo* W_f de la fuerza aplicada,

$$\Delta E = \Delta [E_c + E_m(x)] = W_f$$

La energía $E = E_c + E_m$ de la masa m puede disminuir si W_f es negativo (por ejemplo, cuando F_x es una fuerza de rozamiento o fricción) o aumentar cuando es positivo. El estudio detallado del movimiento oscilatorio con y sin rozamiento se efectuará en el capítulo 7.

3.4.2. Energía potencial gravitatoria

Consideramos una masa M en una posición fija \mathbf{r}_1 y la expresión para la intensidad del campo gravitatorio de la Ec. 3.3. Si sustituimos $\mathbf{f}_M(\mathbf{r})$ en la Ec. 3.12 e integramos entre dos puntos cualesquiera del espacio \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b obtendremos,

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{f}_M(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (-GM) \int_{r_a}^{r_b} \frac{d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^2} = (GM) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_M|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_M|} \right] = -\Delta U_g$$

Podemos introducir la siguiente expresión,

$$U_g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) = -G \frac{M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} + C \quad (3.17)$$

que corresponde al *potencial gravitatorio* creado por la masa M en el punto \mathbf{r} . La constante de integración C se hace nula especificando que el potencial gravitatorio ha de disminuir a medida que aumenta la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|$ de modo que en el límite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \rightarrow \infty$ se tiene $U_g \rightarrow 0$.

A partir de la Ec. 3.17 se recupera la intensidad del campo gravitatorio definida en 3.3 mediante $\mathbf{f}_M(\mathbf{r}) = -\nabla U_g$ empleando la Ec. 9.12. Puesto que el vector \mathbf{r}_M es fijo, si hacemos el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ podemos calcular,

$$\mathbf{f}_M = -\nabla U_g = -\frac{dU_g}{du} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{\mathbf{u}}{u} \frac{d}{du} \left(G \frac{M}{u} \right) = -G \frac{M}{u^2} \frac{\mathbf{u}}{u}$$

⁹Aplicamos aquí la fórmula 9.11 de la sección *Complementos* en una dimensión.

que es justamente la Ec. 3.3.

Como la fuerza que ejerce M sobre otra masa m situada en el punto \mathbf{r} es $\mathbf{F}_{Mm} = m \mathbf{f}_M(\mathbf{r})$, el trabajo W_{ab} que realiza el campo gravitatorio creado por la masa M sobre m cuando esta se desplaza entre dos puntos a y b es entonces,

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}_{Mm}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{f}_M(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = (G m M) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_1|} \right] = -m \Delta U_g$$

y la variación de la energía potencial será $\Delta E_p = m \Delta U_g$.

Para el movimiento de una partícula sobre la superficie terrestre, consideremos el triángulo de la Fig. 3.7 respecto del que se mueve en un plano vertical sometida a la fuerza $\mathbf{F} = -m g \mathbf{k}$ con velocidad $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$. Su ecuación de movimiento es,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m g \mathbf{k}$$

y si hacemos el producto escalar con \mathbf{v} ,

$$m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m g \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = -m g v_z$$

que podemos integrar respecto del tiempo,

$$\Delta E_c = \left[\frac{m v^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = -m g \int_{z_a}^{z_b} dz = -m g (z_b - z_a) = -\Delta E_p = W_{ab}$$

Encontramos el *trabajo* $W_{ab} = -m g \Delta z$ que será *negativo* cuando $\Delta z > 0$, la variación de la energía potencial es $\Delta E_p = -\Delta E_c = -W_{ab} = m g \Delta z$ que sólo depende de las alturas final e inicial. Podemos definir una energía potencial,

$$E_p(z) = m g z + C$$

donde C es una constante de modo que,

$$\Delta E_p = E_p(z_b) - E_p(z_a) = m g \Delta z$$

Si calculamos ¹⁰,

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p = -\frac{dE_g}{dz} \mathbf{k} = -m g \mathbf{k}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula es *independiente* del valor de C que sólo determina el valor $E_p(0)$ cuando $z = 0$.

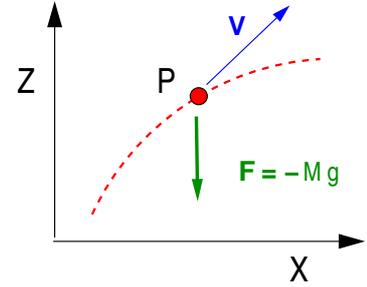


Figura 3.7: Partícula P que se mueve en el plano vertical (Z, X) .

¹⁰Aplicamos aquí la fórmula 9.11 de la sección *Complementos*

3.4.3. Potencial electrostático

Si siguiendo un procedimiento análogo al empleado para el potencial gravitatorio podemos obtener la expresión del potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$. Tomando fija la posición de la carga Q en el punto \mathbf{r}_Q y empleando el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ de la Ec. 3.5,

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_Q|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_Q|} \right] = -[\phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a)]$$

donde introducimos el potencial eléctrico,

$$\phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|} \quad (3.18)$$

creado por la carga Q en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$. Debe decrecer con la distancia y en el límite $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| \rightarrow \infty$ resulta $\phi \rightarrow 0$. Como la fuerza entre dos cargas es $\mathbf{F}_{Qq} = q\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$, el trabajo efectuado por el campo eléctrico creado por Q cuando otra carga q se mueve entre los puntos \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b será,

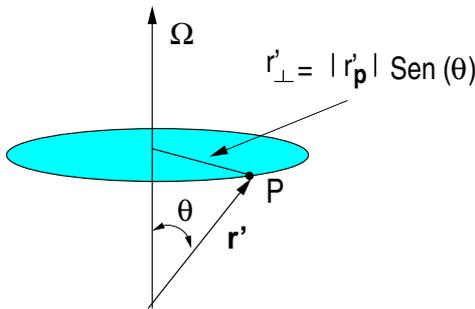
$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}_{Qq}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q [\phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a)] = -q \Delta\phi$$

y la variación de la energía potencial es $\Delta E_p = q \Delta\phi$. El campo eléctrico se recupera también como $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi$, puesto que el vector \mathbf{r}_1 es fijo, con el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$ podemos calcular el gradiente como anteriormente,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{du} \frac{\mathbf{u}}{u} = -\frac{\mathbf{u}}{u} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{u} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{u^2} \frac{\mathbf{u}}{u}$$

que es justamente la Ec. 3.5.

3.4.4. Energía potencial centrífuga



En el caso particular de que la velocidad angular Ω sea un vector constante podemos encontrar una expresión para la energía potencial de la fuerza centrífuga,

$$\mathbf{F}_c = -m [\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r}')]]$$

Si escribimos,

$$dW = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' = -m (\Omega \wedge [\Omega \wedge \mathbf{r}']) \cdot d\mathbf{r}'$$

Figura 3.8: Proyección de \mathbf{r}'_p perpendicular a la velocidad angular Ω

e introducimos el vector $\mathbf{u} = \Omega \wedge \mathbf{r}'$ de modo que $d\mathbf{u} = \Omega \wedge d\mathbf{r}'$ por ser Ω constante,

$$(\Omega \wedge [\Omega \wedge \mathbf{r}']) \cdot d\mathbf{r}' = (\Omega \wedge \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r}' = (d\mathbf{r}' \wedge \Omega) \cdot \mathbf{u}$$

Sustituyendo,

$$dW = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' = -m (d\mathbf{r}' \wedge \Omega) \cdot \mathbf{u} = m (\Omega \wedge d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{u} = m \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}$$

e integrando de modo análogo a los ejemplos anteriores se finalmente obtiene la energía potencial centrífuga,

$$E_p = -\frac{m}{2} |\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'|^2 = -\frac{m}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 r_{\perp}^2.$$

Como puede verse en la figura 3.8 la energía potencial centrífuga depende de la proyección $r'_{\perp} = |\mathbf{r}'_p| \sin \theta$ perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$ del vector \mathbf{r}'_p : Cuanto mayor es ésta, más intensa es la fuerza centrífuga \mathbf{F}_c y su energía centrífuga E_{ct} mas negativa.

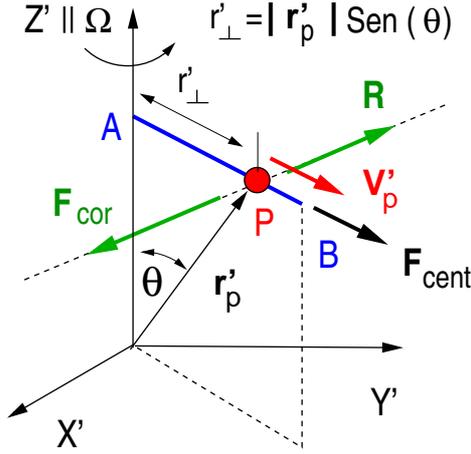


Figura 3.9: La partícula P se mueve sin rozamiento ensartada en una guía horizontal que gira con $\boldsymbol{\Omega}$ constante.

En la Fig. 3.9 la partícula P de masa m se mueve sin rozamiento ensartada en una guía horizontal AB que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ constante. En el triedro S' que gira con la guía el vector \mathbf{r}'_{\perp} es perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$ con módulo $r'_{\perp} = r' \sin \theta$ que apunta hacia P . Proyectando las posiciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$ y velocidades $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}'_{\parallel}$. Para el movimiento a lo largo de la guía la ecuación de movimiento de P es,

$$m \frac{dv'_{\perp}}{dt} = m \Omega^2 r'_{\perp}$$

Introduciendo $dv'_{\perp} = \dot{r}'_{\perp} dt$ la primera ecuación,

$$m \dot{r}'_{\perp} \ddot{r}'_{\perp} = m \Omega^2 r'_{\perp} \dot{r}'_{\perp}$$

e integrando,

$$\left[m \frac{\dot{r}'_{\perp}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \left[m \Omega^2 \frac{r'_{\perp}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b}$$

A la izquierda nos aparece la variación de la energía cinética ΔE_c en el triedro S' y el término de la derecha es el trabajo W'_{ab} y tendremos,

$$\Delta E_{ct} = -W'_{ab} = -\frac{m \Omega^2}{2} (r'^2_{\perp,b} - r'^2_{\perp,a})$$

De nuevo podemos definir la energía potencial de modo que E_p de modo que $\Delta E'_c = -\Delta E_p$ de la forma,

$$E_p = -\frac{m}{2} \Omega^2 r'^2_{\perp} + C$$

siendo C una constante arbitraria. La expresión para la fuerza centrífuga que experimenta P a lo largo de la guía se recupera tomando de nuevo el gradiente,

$$\mathbf{F}_c = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dr'_{\perp}} \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} = \frac{\mathbf{r}'_{\perp}}{r'_{\perp}} \frac{d}{dr'_{\perp}} \left(\frac{m}{2} \Omega^2 r'^2_{\perp} \right)$$

y recuperamos la Ec. 3.10,

$$\mathbf{F}_c = m \Omega^2 r'_\perp \left(\frac{\mathbf{r}'_\perp}{r'_\perp} \right)$$

Hay que subrayar que la fuerza centrífuga no es la única que actúa sobre P puesto que la fuerza de Coriolis \mathbf{F}_{cor} y la reacción \mathbf{R} actúan a lo largo de la dirección perpendicular a la guía como muestra la figura 3.9. Sin embargo, ambas fuerzas son perpendiculares a $d\mathbf{v}'$, no realizan trabajo y por lo tanto no aparecen en la ecuación 3.15 para la variación de la energía cinética de P .

3.5. Momento cinético

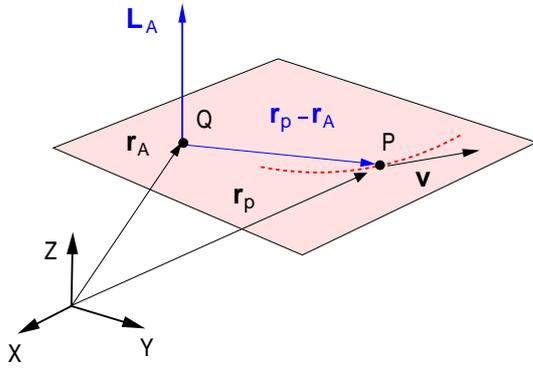


Figura 3.10: Momento cinético \mathbf{L}_A respecto del punto A en el triedro S .

Respecto de un punto A se define el vector *momento cinético* o *momento angular* \mathbf{L}_A de una partícula P de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto de un triedro S como el producto vectorial,

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{p}$$

en donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el vector cantidad de movimiento. Como puede verse en la Fig. 3.10 el vector \mathbf{L}_A es perpendicular al plano formado por los vectores velocidad \mathbf{v} y $(\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A)$ siendo sus componentes,

$$L_{Ax} = y p_z - z p_y$$

$$L_{Ay} = z p_x - x p_z$$

$$L_{Az} = x p_y - y p_x$$

Si el punto A no se mueve ($\mathbf{v}_A = 0$) respecto del triedro S derivando \mathbf{L}_A respecto del tiempo,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{p} + (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

el primer término es nulo y sustituyendo $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ encontramos,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F} \quad (3.19)$$

Cuando los vectores \mathbf{F} y $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A)$ sean paralelos tendremos $d\mathbf{L}_A/dt = 0$ y el vector momento cinético es entonces una *magnitud conservada*, lo mismo que sucedía con la energía bajo ciertas condiciones (Pag. 23). Al ser una magnitud vectorial en algunos casos no se conserva el vector \mathbf{L}_Q sino sólo alguna de sus componentes. Si escribimos $d\mathbf{L}_A/dt = \mathbf{M}_A$,

$$\mathbf{M}_A = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F} \quad (3.20)$$

al vector \mathbf{M}_A se le denomina *momento* de la fuerza \mathbf{F} respecto del punto A .

El momento cinético se conserva cuando la fuerza entre dos partículas se ejerce a lo largo de la recta que las une. Si en la Ec. 3.2 para la fuerza de gravedad tomamos el punto A en la posición de la masa M entonces los vectores \mathbf{F}_{Mm} y $\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ resultan ser paralelos y por la Ec. 3.19 tendremos $d\mathbf{L}_A/dt = 0$. Lo mismo sucede con el potencial eléctrico (Ec. 3.4) situando el punto A en cualquiera de las dos cargas q y Q .

Poleas y cables ideales: Un hilo o cable ideal es aquel que consideramos inextensible y sin masa, cuya tensión T es siempre positiva de modo que si tiramos de uno de sus extremos la fuerza ejercida se *transmite* a lo largo del mismo. La tercera ley de Newton nos dice que al tirar de un extremo ha de aparecer una fuerza de reacción en el extremo opuesto. Las tensiones pueden clasificarse como fuerzas de contacto y el hilo introduce en un problema una *ecuación de ligadura* adicional ya que relaciona los movimientos de los dos cuerpos que mantiene unidos.

Además, los cables ideales relacionan el movimiento de los cuerpos a través de poleas. En una *polea ideal* no hay rozamiento entre ésta y el cable y tampoco se transmite cantidad de movimiento a la polea, que se considera sin masa, (o que ésta es despreciable). Las poleas ideales cambian la dirección del cable apoyado en ellas y por lo tanto la dirección de la tensión del cable sin alterar su valor.

Puesto que la tensión en un hilo ideal actúa en la dirección de la recta que une a los cuerpos, como vemos en la Fig. 3.11 para las dos partículas de masas M y m unidas por un hilo ideal el momento cinético se conserva respecto del punto O .

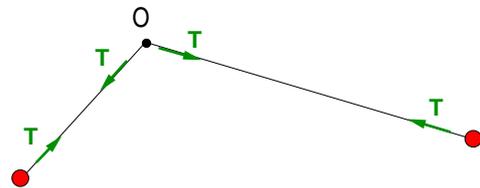


Figura 3.11: Dos masas m y M unidas por un hilo ideal al clavo O que se mueven sobre un plano horizontal.

Como muestra la Fig. 4.1, un *sistema de partículas* es un conjunto de N masas diferentes m_α situadas en los puntos \mathbf{r}_α , que se mueven respecto de un triedro S (no necesariamente inercial) donde $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

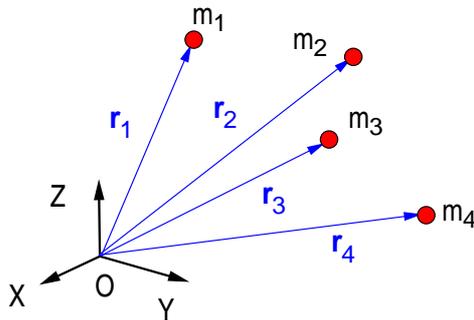


Figura 4.1: Sistema de partículas.

Las partículas interactúan entre sí siendo $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ la fuerza entre dos partículas dadas α y β a la que llamaremos *fuerza interna*. Sobre cada una de ellas puede también actuar una *fuerza externa* al sistema $\mathbf{F}_{e\alpha}$ y si además el triedro S no es inercial tendremos que considerar la fuerza de inercia $\mathbf{F}_{I\alpha}$ correspondiente.

Las ecuaciones del movimiento para cada una de las $\alpha = 1, \dots, N$ partículas serán,

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha}^N \mathbf{F}_{\alpha\beta} \quad (4.1)$$

donde evidentemente $\mathbf{F}_{\alpha\alpha} = 0$ y consideraremos que $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$.

Excepto en algunos casos triviales la resolución simultánea de este conjunto de $3N$ ecuaciones diferenciales es un problema muy complicado por lo que hemos de introducir nuevas herramientas que permitan una descripción física adecuada.

4.1. Posición y velocidad del centro de masas

Se define el *centro de masas* (CM) del sistema de partículas como el punto del espacio cuyo vector de posición es,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad \text{donde,} \quad M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \quad (4.2)$$

es la masa total del sistema. Como puede verse en la Fig. 4.2, la posición del centro de masas no tiene por qué coincidir necesariamente con la de una de las partículas del sistema. La *velocidad del centro de masas* se obtiene derivando este vector respecto del tiempo,

$$\mathbf{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

Para cada partícula ¹ tendremos $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_{\alpha}$ en donde los vectores \mathbf{s}_{α} representan las posiciones de las partículas respecto de un triedro S_{CM} con origen en el centro de masas y que se mueve con la velocidad \mathbf{V}_{CM} del mismo. Derivando respecto del tiempo resulta $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_{\alpha}$ donde $\mathbf{w}_{\alpha} = d\mathbf{s}_{\alpha}/dt$ serán las velocidades de las partículas *respecto del triedro S_{CM} que no rota respecto de S* .

Si multiplicamos $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_{\alpha}$ por m_{α} y sumamos,

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \right) \mathbf{R}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} = M \mathbf{R}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha}$$

Efectuando la misma operación para las velocidades $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_{\alpha}$ respecto del triedro S_{CM} obtenemos empleando la definición de \mathbf{R}_{CM} ,

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} = 0 \quad \text{y derivando} \quad \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0. \quad (4.3)$$

4.2. Movimiento del centro de masas

La ecuación de movimiento para el CM del sistema se obtiene sumando las $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ecuaciones vectoriales 4.1,

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta}$$

Puesto que $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ y $\mathbf{F}_{\alpha\alpha} = 0$ el doble sumatorio en la última ecuación es nulo. Es decir, *la resultante de las fuerzas internas del sistema de partículas es nula*,

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.4)$$

En consecuencia,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \quad (4.5)$$

¹En la Fig. 4.2 se han representado solamente dos partículas pero el mismo esquema es aplicable a las $\alpha = 1, 2, \dots, N$ partículas del sistema de la Fig. 4.1.

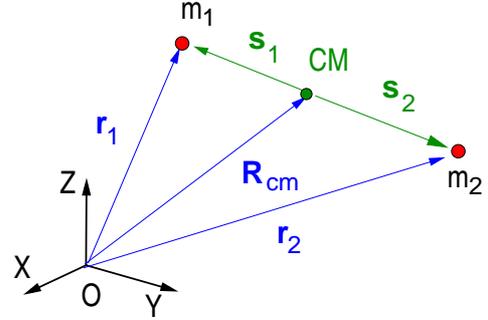


Figura 4.2: Posición del centro de masas (CM) de dos partículas.

que nos indica que el centro de masas se mueve como si fuese a su vez una partícula donde se concentra toda la masa M del sistema sobre la que se encuentra aplicada la resultante \mathbf{F}_T de todas las fuerzas externas y de inercia respecto del triedro S .

$$\mathbf{F}_T = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha})$$

Para las fuerzas de inercia,

$$\mathbf{F}_I = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{I\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left[\mathbf{a}_o + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}_{\alpha} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{\alpha}) \right]$$

e introduciendo las definiciones anteriores,

$$\mathbf{F}_I = -M \left[\mathbf{a}_o + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{R}_{CM} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}_{CM}) \right]$$

siendo $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de S respecto de otro triedro inercial.

Cuando $\mathbf{F}_T = 0$ tendremos en la Ec. 4.5 que $\mathbf{P}_{CM} = M\mathbf{V}_{CM}$ es un vector constante y la cantidad de movimiento del CM se conserva.

En las ecuaciones 4.5 y en las que siguen para evitar confusiones tomaremos la sumas sobre todas las partículas $\alpha = 1, \dots, N$ del sistema para simplificar la notación. En realidad sólo debemos contar las *fuerzas aplicadas no nulas*, es decir aquellas que se encuentran aplicadas sobre las partículas $p = 1, \dots, m \leq N$, donde $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_{ep} + \mathbf{F}_{Ip} \neq 0$.

Multiplicando escalarmente por $d\mathbf{R}_{CM} = \mathbf{V}_{CM} dt$ la ecuación 4.5 e integrando entre dos instantes de tiempo t_a y t_b en los que las posiciones del CM son \mathbf{R}_a y \mathbf{R}_b

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} \right) \cdot \mathbf{V}_{CM} dt = \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{R}_{CM}$$

con lo que resulta para la energía cinética del centro de masas,

$$\left[\frac{M}{2} V_{CM}^2 \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} = W_{CM} \quad (4.6)$$

La variación de la energía cinética del centro de masas es igual al trabajo de la resultante \mathbf{F}_T de las fuerzas aplicadas sobre el sistema calculado a lo largo de la trayectoria $\mathbf{R}_{CM}(t)$ del centro de masas. Esta última ecuación es equivalente a la relación 3.15 que obtuvimos para la energía de una partícula.

4.3. Energía de un sistema de partículas

Si introducimos la velocidad del CM en la energía cinética del sistema de partículas,

$$E_c = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_{\alpha}) \cdot (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_{\alpha})$$

y empleando la Ec. 4.3 encontramos la siguiente expresión,

$$E_c = \frac{M V_{CM}^2}{2} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} = E_{cin} + E'_c \quad (4.7)$$

La energía cinética del sistema puede entonces descomponerse como una suma de la energía cinética ($E_{cin} = M V_{CM}^2/2$) del CM respecto de S y de la energía cinética de cada una de las partículas ($E'_c = m_\alpha w_\alpha^2/2$) respecto del triedro S_{CM} . Como veremos a continuación la Ec. 4.6 no es igual a la energía del sistema de partículas, salvo en algunos casos especiales, por ejemplo, cuando sean nulos los trabajos de las fuerzas interiores del sistema.

Mediante la Ec. 4.1 podemos calcular los trabajos infinitesimales dW_α que efectúa la fuerza aplicada sobre cada partícula y sumarlos para obtener el trabajo sobre el sistema W_{sis} ,

$$dW_{sis} = \sum_{\alpha=1}^N dW_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \cdot d\mathbf{r}_\alpha$$

también respecto del triedro S ,

$$dW_{sis} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left(\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \cdot \mathbf{v}_\alpha \right) dt = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha$$

Integrando entre dos instantes t_a y t_b tendremos $W_{sis} = \Delta E_c$,

$$W_{sis} = \Delta E_c = \left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \right]_a^b = \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha$$

donde substituyendo $d\mathbf{r}_\alpha = d\mathbf{R}_{CM} + d\mathbf{s}_\alpha$,

$$W_{sis} = \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{s}_\alpha \quad (4.8)$$

luego,

$$W_{sis} = W_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha + W_{int} = W_{int} + W_{ext} \quad \text{donde, } W_{ext} = W_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha$$

Hemos visto que el término W_{CM} corresponde al trabajo de la resultante \mathbf{F}_T de las fuerzas en el CM del sistema y término siguiente es la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas W_α evaluados en el triedro S_{CM} . La suma de estos dos representa el *trabajo producido por las fuerzas externas* W_{ext} aplicadas al sistema de partículas. El tercer sumando es entonces el *trabajo efectuado por las fuerzas internas* W_{int} y hay que subrayar que aunque la *resultante* (Ec. 4.4) de las fuerzas internas sea nula, *en general el trabajo de éstas es* $W_{int} \neq 0$.

Entre los instantes t_a y t_b podemos descomponer el doble sumatorio,

$$W_{int} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{s}_\alpha = \sum_{\text{pares } (\alpha,\beta)} \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{s}_\alpha + \mathbf{F}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{s}_\beta)$$

y puesto que $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$,

$$W_{int} = \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d[\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta] \quad (4.9)$$

El trabajo de las fuerzas internas resulta ser función de las distancias relativas $\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ entre las partículas (ver Fig. 4.2) y en general W_{int} no será nulo. Existen sin embargo algunas excepciones prácticas importantes como,

- *Poleas y cables*: El trabajo de las fuerzas interiores de un sistema como el de la Fig. 3.11 será nulo porque al existir la ligadura del cable ideal (de longitud constante) tendremos $d[\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta] = 0$
- *Sólido rígido*: En un sólido rígido ideal (indeformable) las distancias relativas entre sus partículas $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ son constantes y por lo tanto $W_{int} = 0$.

Si las fuerzas internas son conservativas, $dU(|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta|) = -\mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d(\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta)$ y entonces,

$$W_{int} = \sum_{\text{pares}(\alpha,\beta)} \int_{\mathbf{s}_a}^{\mathbf{s}_b} \mathbf{F}_{\alpha,\beta} \cdot d[\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta] = -\Delta U_{int}$$

donde tenemos $\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}_\beta = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ como se puede ver en la Fig. 4.2. El trabajo de las fuerzas internas es en este caso el mismo en los triedros S_{CM} y S .

Combinando las ecuaciones 4.7 y 4.8 como $W_{CM} = \Delta[mV_{CM}^2/2]$ (Ec. 4.6) obtenemos,

$$\left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} \right]_a^b = \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\mathbf{s}_a}^{\mathbf{s}_b} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{s}_\alpha$$

o con la notación anterior,

$$\left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha + W_{int} \quad (4.10)$$

Esta expresión nos proporciona la variación de la energía cinética del sistema respecto del triedro S_{CM} como suma del trabajo de las fuerzas externas aplicadas sobre cada partícula, evaluadas en dicho triedro y el trabajo de las fuerzas internas.

Como vemos, la variación de la energía cinética del sistema de partículas (Ec. 4.7) entre dos instantes de tiempo

$$\Delta E_c = \left[\frac{M V_{CM}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b}$$

podemos escribirla como suma de dos ecuaciones. Una primera (Ec. 4.6) para la variación de la energía cinética del CM respecto de S y la segunda (Ec. 4.10) para la variación de la energía cinética de las partículas *relativa* al triedro S_{CM} del centro de masas,

$$\left[\frac{M V_{CM}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM}$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha w_\alpha^2}{2} \right]_a^b = \sum_{\alpha=1}^N \int_{s_a}^{s_b} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha + W_{int} = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha + W_{int}$$

4.4. Momento cinético de un sistema de partículas

El momento cinético \mathbf{L}_A de un sistema de partículas respecto de un punto A es la suma vectorial de los momentos cinéticos $\mathbf{L}_{A\alpha}$ de cada una de las partículas del sistema respecto de dicho punto,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{L}_{A\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (4.11)$$

Si introducimos el sistema de CM con el cambio $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_\alpha$ y $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_\alpha$ entonces,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [\mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_\alpha - \mathbf{r}_A] \wedge [\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{w}_\alpha]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A = & \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{V}_{CM} + (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_A) \wedge \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{w}_\alpha \right) + \\ & + \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{s}_\alpha \right) \wedge \mathbf{V}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{w}_\alpha \end{aligned}$$

donde son dos términos nulos (ver las Ecs. 4.3) y queda finalmente,

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_A) \wedge M \mathbf{V}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{w}_\alpha$$

El segundo término es el momento cinético del sistema respecto del triedro S_{CM} ,

$$\mathbf{L}_{CM} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{w}_\alpha$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_{CM} + (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_A) \wedge M \mathbf{V}_{CM} \quad (4.12)$$

Podemos descomponer el momento cinético respecto de un punto A en la suma vectorial del momento cinético del sistema de partículas \mathbf{L}_{CM} respecto del CM más el momento cinético del CM respecto de dicho punto.

Si la posición A no cambia (el vector \mathbf{r}_A es cte. en el tiempo y $\mathbf{v}_A = 0$ o bien $A \equiv CM$) y derivamos respecto del tiempo la Ec. 4.11,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt}$$

donde podemos sustituir las fuerzas de la Ec. 4.1,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta}$$

Cuando las fuerzas internas son $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ y también paralelas a $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ no contribuyen a $d\mathbf{L}_A/dt$ puesto que,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} &= \sum_{\text{pares } (\alpha,\beta)} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} + (\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_A) \wedge \mathbf{F}_{\beta\alpha} \\ &= \sum_{\text{pares } (\alpha,\beta)} (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \wedge \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

por ser nulo el último sumando. Tendremos finalmente,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \quad (4.13)$$

en donde $\mathbf{F}_{I\alpha}$ son las fuerzas de inercia en S . La derivada respecto del tiempo del momento cinético es igual a la suma de los momentos \mathbf{M}_α de las fuerzas aplicadas al sistema respecto del punto A fijo,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{M}_\alpha \quad \text{siendo,} \quad \mathbf{M}_\alpha = (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha})$$

Sólo aparecen los momentos \mathbf{M}_α respecto de A de las fuerzas externas y de inercia $\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}$ y no contribuyen a $d\mathbf{L}_A/dt$ las fuerzas internas $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ cuando estas actúan a lo largo de los vectores $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$.

4.5. Aplicaciones

4.5.1. Sistema de dos partículas

El sistema de partículas más simple posible es el de la Fig. 4.3 formado sólomente por dos partículas de masas m_1 y m_2 ². Si introducimos las posiciones respecto del CM del sistema,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{R}_{CM} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{R}_{CM} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$$

Si en la Ec. 4.2 para el vector \mathbf{R}_{CM} de dos partículas sumamos y restamos $m_2 \mathbf{r}_1$ se tiene,

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R}_{CM} + m_2 \mathbf{r}_1 = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_2 \mathbf{r}_1$$

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R}_{CM} + m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_1$$

²Puede consultarse la Sec. 7.2, pags. 222-225 de la Ref. [4], Sec. 4.7, pags. 184-188 de la Ref. [2] y el Ejemplo 9.5, pags. 252-255 de la Ref. [1].

luego,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

y puesto que, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} + \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right] (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = \mathbf{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

Finalmente,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$$

Introducimos el vector,

$$\mathbf{q} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (4.14)$$

cuyo módulo es la distancia relativa entre las dos partículas y la denominada *masa reducida* del sistema,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Las ecuaciones quedan entonces expresadas en función del vector \mathbf{q} y su derivada respecto del tiempo que es la velocidad \mathbf{v}_q ,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{q} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{q} \quad (4.15)$$

y derivando respecto del tiempo con $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{s}}_1 - \dot{\mathbf{s}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ obtenemos las velocidades,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}_q \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}_q \quad (4.16)$$

La energía cinética de este sistema de dos partículas es,

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

donde substituyendo las velocidades 4.16,

$$E_c = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{v}_q^2$$

Operando resulta finalmente una ecuación equivalente a la Ec. 4.7,

$$E_c = \frac{M}{2} \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 \quad (4.17)$$

la energía cinética se descompone en dos términos, la del centro de masas y otra proporcional a la masa reducida.

Un resultado análogo se obtiene si calculamos el momento cinético respecto de un punto O fijo,

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{r}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2$$

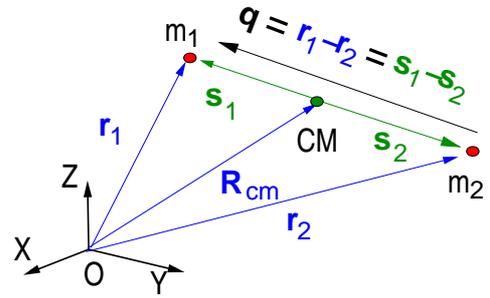


Figura 4.3: Sistema de dos partículas.

$$\mathbf{L}_o = (\mathbf{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{q}) \wedge (m_1 \mathbf{V}_{CM} + \mu \mathbf{v}_q) + (\mathbf{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{q}) \wedge (m_2 \mathbf{V}_{CM} - \mu \mathbf{v}_q)$$

de donde operando se obtiene,

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{R}_{CM} \wedge M \mathbf{V}_{CM} + \left(\frac{\mu^2}{m_1} + \frac{\mu^2}{m_2} \right) (\mathbf{q} \wedge \mathbf{v}_q)$$

Llegamos finalmente a una descomposición del momento cinético análoga a la que obtuvimos para la energía cinética que equivale a la Ec. 4.12,

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{CM} \wedge M \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{q} \wedge \mu \mathbf{v}_q \quad (4.18)$$

Las ecuaciones 4.17 y 4.18 nos proporcionan la energía cinética y el momento cinético del sistema de la Fig. 4.2. En el caso mas general sobre este sistema de dos partículas actúan unas fuerzas interiores $\mathbf{F}_{12}^i = -\mathbf{F}_{21}^i$ y fuerzas exteriores \mathbf{F}_1^e y \mathbf{F}_2^e . Las ecuaciones de movimiento son,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_{21}^i \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2^e + \mathbf{F}_{12}^i \quad (4.19)$$

Sumando las Ecs. 4.19, siendo $\mathbf{F}_1^e = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{I1}$ y $\mathbf{F}_2^e = \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{I2}$ encontramos,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = (\mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{I1} + \mathbf{F}_{21}^i) + (\mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{I2} + \mathbf{F}_{12}^i)$$

y con $M = m_1 + m_2$ obtenemos la Ec. 4.5 de movimiento para el centro de masas,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e$$

en donde sólo intervienen las fuerzas externas.

4.5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales

Un caso de particular interés es el del movimiento de dos partículas de masas m_1 y m_2 que interaccionan entre sí mediante fuerzas que dependen de su distancia relativa,

$$\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

y que actúa a lo largo de la recta que une las masas m_1 y m_2 . A este tipo de fuerzas pertenece el campo gravitatorio (Ec. 3.2) o electrostático (Ec. 3.4). Si empleamos el vector $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (Ec. 4.14),

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = F(q) \frac{\mathbf{q}}{q}$$

y podemos utilizar los resultados de la sección anterior. Si consideramos que la masa m_1 permanece inmóvil en el punto \mathbf{r}_1 el movimiento de los dos cuerpos se reduce al de una partícula en un campo exterior donde la energía potencial $U(q)$ depende sólo de la distancia $|q|$ al punto \mathbf{r}_1 ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\nabla U(q) \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\frac{dU}{dq} \frac{\mathbf{q}}{q}$$

aplicando la Ec. 9.12. Se dice que es una *fuerza central* puesto que su dirección pasa siempre por el punto fijo \mathbf{r}_2 del espacio denominado *centro de fuerzas*. Consideraremos además que el sistema de dos partículas se encuentra *aislado*, es decir, que no existen fuerzas externas de modo que el CM del sistema es un triedro inercial.

Como se deduce de la Ec. 4.5 la cantidad de movimiento de este sistema de dos partículas es constante,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_{CM}$$

y sus velocidades \mathbf{p}'_1 y \mathbf{p}'_2 respecto de un referencial S_{CM} que se mueva con el CM del sistema satisfacen $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$. Empleando las Ecs. 4.15 y 4.16 con $\mathbf{V}_{CM} = 0$,

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{v}_q = \mu \mathbf{v}_q$$

en donde μ es la masa reducida, $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{v}_q = d\mathbf{q}/dt$. Restando las Ecs. de movimiento 4.19,

$$\frac{d\mathbf{v}_q}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(q) \frac{\mathbf{q}}{q} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} F(q) \frac{\mathbf{q}}{q}$$

obtenemos una ecuación de movimiento simplificada,

$$\mu \frac{d\mathbf{v}_q}{dt} = F(q) \frac{\mathbf{q}}{q} \quad (4.20)$$

que corresponde a la de una partícula de masa μ que se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(q)$, respecto del sistema de CM. Junto con las Ecs. 4.17 y 4.18,

$$E_c = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{q} \wedge \mu \mathbf{v}_q$$

se simplifica el problema del movimiento de dos cuerpos, resultando las distancias $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y las velocidades relativas $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ las cantidades relevantes.

Empleando la Ec. 4.13 podemos comprobar que se conserva el momento cinético, $\mathbf{L}_{CM} = \text{cte}$. puesto que $\mathbf{F}(q)$ es paralelo a \mathbf{q} . En consecuencia, el movimiento de las dos partículas se encuentra confinado en un plano perpendicular a \mathbf{L}_{CM} en el que están contenidos los vectores $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y \mathbf{v}_q . En el caso de que la fuerza central \mathbf{F} sea además *conservativa* se tendrá $\mathbf{F} = -\nabla U$ y también se conservará la energía del sistema ³.

Al encontrarse el movimiento contenido en un plano, (que podemos identificar con el (x, y)) descomponemos la velocidad $\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$ en sus componentes radial \mathbf{v}_r paralela al vector $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y angular \mathbf{v}_θ perpendicular a la anterior (ver Pag. 5)

$$E = E_c + U(q) = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_q^2 + U(q) = \frac{\mu}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \dot{\theta}^2) + U(q) = \text{cte} \quad (4.21)$$

$$L_{CM} = \mu q v_\theta = \text{cte}. \quad (4.22)$$

4.5.3. Leyes de Kepler

A partir de las Ecs. 4.22 y 4.21 puede iniciarse el estudio del movimiento bajo cualquier fuerza central que no es el objetivo del presente curso. Nos limitaremos al caso particular del movimiento planetario, donde $\mathbf{F}(q)$ será la Ec. 3.2 en el límite en que una de las dos masas

³Ver la Ec. 9.12 del capítulo *Complementos*.

sea mucho mayor que la otra. Si $m_2 = m \ll m_1 = M$ entonces la masa reducida es $\mu \simeq m$ y la posición del CM es aproximadamente la de la masa mayor, $\mathbf{R}_{CM} \simeq \mathbf{r}_2$ donde podemos situar el origen del triedro S_{CM} como se muestra en la Fig. 4.4.

Como hemos visto, el movimiento de la masa m ha de encontrarse contenido en un plano que pase por el origen O que hacemos coincidir con el plano (x, y) . Respecto de un triedro S_{CM} situado en M se conserva el momento cinético respecto de O como se deduce de la Ec. 3.19.

Uno de los primeros éxitos de la mecánica de Newton (1642-1727) que publicó sus *Principia* en 1687 fué la deducción de las leyes de Kepler (1571-1630). Estas últimas constituyen una síntesis de las observaciones disponibles hasta entonces del movimiento de los cuerpos celestes. Para los planetas del sistema solar, Kepler concluyó que,

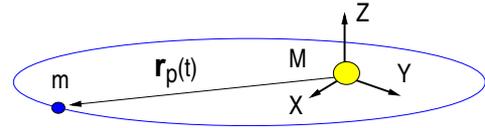


Figura 4.4: Órbita del planeta de masa m alrededor de otro de masa $M \gg m$.

1ª Ley: Las trayectorias de los planetas del sistema solar son elipses con el sol en uno de sus focos.

2ª Ley: El área $A(t)$ barrida por el radio vector $\mathbf{r}(t)$ que va del sol a cada planeta de masa m en la unidad de tiempo (denominada *velocidad areolar*) es constante en el tiempo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}_o|}{2m}$$

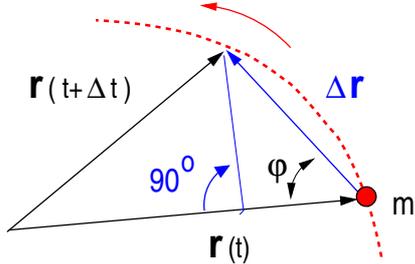
3ª Ley: La relación entre el período T de la órbita y el semieje a de la elipse es,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

La segunda ley es una consecuencia de la conservación del momento cinético. Si consideramos un intervalo Δt pequeño como se observa en la Fig. 4.5 podemos escribir,

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$$

y como se observa en la figura 4.5 el área ΔA del triángulo formado por estos tres vectores es,



$$\Delta A = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura})$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t)| |\Delta \mathbf{r}| \sin \varphi = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge \Delta \mathbf{r}|$$

de modo que dividiendo por Δt y tomando el límite,

Figura 4.5: Dos posiciones sucesivas de la órbita separadas un intervalo de tiempo Δt pequeño.

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r} \wedge \Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{L}_o|}{2m}$$

en donde \mathbf{L}_o representa el momento cinético respecto de uno de los focos de la elipse que es constante (Ec. 3.19) como se desprende de las Figs. 4.4 y 4.6. Si T es el período de la órbita,

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte} = \frac{A}{T} = \frac{\pi a b}{T}.$$

en donde a y b son los semiejes menor y mayor de la elipse ⁴.

Para deducir la tercera ley empleamos la conservación de la energía (4.21) y del momento cinético (4.22) entre dos puntos opuestos de la órbita: El más cercano r_m y mas alejado r_x al planeta mas pesado. En ellos se tienen respectivamente las velocidades máxima v_x y mínima v_m que son además perpendiculares a sus respectivos vectores de posición. Entonces,

$$m v_x r_m = m v_m r_x$$

$$\frac{m v_x^2}{2} - \frac{G M m}{r_m} = \frac{m v_m^2}{2} - \frac{G M m}{r_x}$$

Eliminamos v_x introduciendo $v_x^2 = (v_m r_x)^2 / r_m^2$ en la segunda ecuación de la forma,

$$v_m^2 - v_m^2 = (2GM) \left[\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_x} \right] > 0$$

de donde operando,

$$v_m^2 \left(\frac{r_x^2 - r_m^2}{r_m^2} \right) = 2GM \frac{r_x - r_m}{r_x r_m}$$

resulta,

$$(v_m r_x)^2 = 2GM \frac{r_x r_m}{r_x + r_m} \quad (4.23)$$

Podemos ahora introducir⁵ la relación de r_m y r_x con los parámetros de la elipse $r_m = a - c$, $r_x = a + c$ y $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\frac{r_x r_m}{r_x + r_m} = \frac{(a - c)(a + c)}{(a + c) + (a - c)} = \frac{b^2}{2a}$$

y como por otra parte $dA/dt = L_o/2m = (\pi ab)/T$ tendremos $v_m r_x = 2\pi ab/T$ y substituyendo en 4.23 se obtiene finalmente,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

4.5.4. Choques de partículas

Como hemos visto, si la resultante de las fuerzas aplicadas en el CM de un sistema de partículas es nula ($\mathbf{F}_T = 0$) entonces según la Ec. 4.5 tendremos $d\mathbf{P}_{CM}/dt = 0$ luego

⁴Las propiedades de la elipse se encuentran en la pag. 92.

⁵Ver Pag. 92.

$\mathbf{P}_{CM} = M \mathbf{V}_{CM} = cte$. La cantidad de movimiento del centro de masas del sistema es constante y el triedro S_{CM} será un sistema inercial.

En consecuencia, si dos partículas de masas m_1 y m_2 colisionan siendo $\mathbf{F}_T = 0$ sólo se encontrarán sometidas a las fuerzas internas que existen entre ambas. Puesto que \mathbf{P}_{CM} es constante podremos escribir para dos instantes t antes y t' después de la colisión

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

en donde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ y $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ son las velocidades antes y después del choque. Respecto de un punto fijo A en S tendremos para el momento cinético,

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{L}_{A\alpha} \right] = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge (\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I})$$

y \mathbf{L}_A será un vector constante siempre que $\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I} = 0$ para todas las partículas del sistema.

Si hacemos $\mathbf{F}_{\alpha e} + \mathbf{F}_{\alpha I} = \mathbf{F}_T = 0$ en la Ec. 4.8 resultan W_{CM} , W_α nulos y entre dos instantes t antes y t' después del choque,

$$\Delta E_c = \left[\frac{m_1 v_1^2}{2} \right]_t^{t'} + \left[\frac{m_2 v_2^2}{2} \right]_t^{t'} = W_{int}$$

Puesto que en general $W_{int} \neq 0$ durante una colisión no tiene porqué conservarse la energía cinética de las partículas que intervienen. Si se conserva la energía $\Delta E_c = 0$ decimos que el choque es *elástico* y cuando en la colisión las partículas experimentan transformaciones internas tendremos $\Delta E_c < 0$ y el choque es *inelástico*. Si las dos partículas quedan rígidamente unidas después de la colisión el choque se denomina *perfectamente inelástico*.

Para un choque elástico ($W_{int} = \Delta E_c = 0$) entre dos instantes t y t' antes y después del choque, tendremos,

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Transformamos la primera ecuación,

$$m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) = m_2 (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)$$

y multiplicamos escalarmente por $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1$ ambos miembros y después restamos ambas,

$$m_2 (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1) - m_2 (\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2) = 0$$

y para que esta ecuación se cumpla siempre ha de tenerse,

$$(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2) \cdot [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1) - (\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2)] = 0$$

Finalmente obtenemos que en un choque elástico, $\mathbf{v}_q = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\mathbf{v}'_q$ o bien,

$$\Delta |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| = 0$$

Es decir, el módulo de la velocidad relativa de las partículas que intervienen en un choque elástico no cambia tras la colisión, aunque puede cambiar durante la misma.

Si el choque es inelástico necesitamos más información para poderlo resolver puesto que $W_{int} = \Delta E_c \neq 0$. En el caso de una colisión *perfectamente inelástica*, si \mathbf{V} es la velocidad conjunta de las dos partículas después del choque, podemos evaluar $W_{int} = \Delta E_c$ puesto que,

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}$$

$$W_{int} = (m_1 + m_2) \frac{V^2}{2} - \left[m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} \right]$$

Introduciendo el valor de V de la primera ecuación en la segunda resulta,

$$\frac{1}{2} (m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + m_2^2 v_2^2) = W_{int} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

y despejando W_{int} ,

$$W_{int} = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right] v_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} - m_2 \right] v_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

con lo que se obtiene,

$$W_{int} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2 - 2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = -\mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = -\frac{1}{2} \mu v_q^2$$

que es siempre negativo. No obstante, podríamos haber deducido directamente este resultado de la Ec. 4.17 teniendo en cuenta que puesto que \mathbf{V}_{CM} es constante, la variación de la energía cinética en el choque es justamente,

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} \mu v_q^2 = W_{int}$$

puesto que al quedar unidas las partículas $\mathbf{v}'_q = 0$.

Definimos un sólido rígido ideal como un sistema constituido por $\alpha = 1, 2, \dots, N$ partículas de masas m_α que mantienen constantes en el tiempo sus distancias relativas $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|$ y que, por consiguiente, es *indeformable*. Evidentemente se trata de una aproximación válida para cuerpos de nuestro entorno cuyos cambios de forma y dimensiones bajo la acción de las fuerzas aplicadas son pequeños. Puesto que en el caso de cuerpos macroscópicos el número N de partículas es descomunal, vamos a generalizar previamente la definición del centro de masas de un sistema discreto de partículas para un cuerpo considerado como un continuo. También introduciremos el concepto de *momento de inercia* antes de desarrollar las ecuaciones del movimiento del sólido rígido ideal en el capítulo 6.

5.1. Centro de masas de un sólido rígido

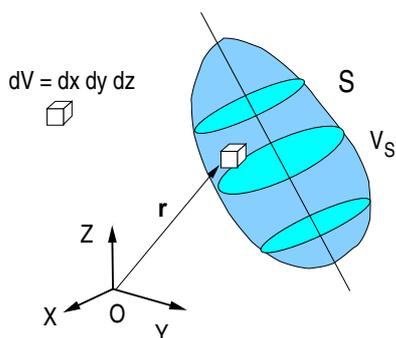


Figura 5.1: Elemento de volumen dV del sólido S .

Cuando el número N de partículas que componen un cuerpo macroscópico es muy elevado es más adecuado caracterizarlos matemáticamente por magnitudes que varían de un modo prácticamente continuo en el espacio. Podemos definir su *densidad*, la masa por unidad de volumen como,

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V}$$

donde $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z)$ es una función continua en cada punto \mathbf{r} del cuerpo considerado. Como se indica en la figura 5.1 la masa δM contenida en un pequeño elemento de volumen δV sería $\delta M = \rho(\mathbf{r}) \delta V$ de modo que,

$$M = \int_{V_S} dM = \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) dV$$

siendo $dV = dx dy dz$ el elemento de volumen y la integral se extiende sobre el volumen V_S del sólido S . La densidad $\rho(\mathbf{r})$ es una función que –en general– tomará diferentes valores en cada punto \mathbf{r} del sólido y es nula ($\rho(\mathbf{r}) = 0$) para puntos del espacio fuera de S . Cuando la densidad es uniforme $\rho(\mathbf{r}) = \rho_o$ constante toma el mismo valor en todos los puntos del sólido decimos que éste es *homogéneo*.

Para caracterizar la posición del centro de masas generalizamos las definiciones de la página 30 para un cuerpo continuo empleando la densidad $\rho(\mathbf{r})$. Sustituimos m_α por $dm = \rho(\mathbf{r}) dV$ de modo que el vector centro de masas resulta,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (5.1)$$

siendo sus tres coordenadas,

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) x dV \quad Y_{CM} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) y dV \quad Z_{CM} = \frac{1}{M} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) z dV$$

Atendiendo a las características del cuerpo (placas planas o alambres) resulta más sencillo calcular el CM introduciendo en las definiciones anteriores la densidad de masa superficial $\sigma(\mathbf{r})$ (masa por unidad de superficie) o lineal $\lambda(\mathbf{r})$ (masa por unidad de longitud) y los elementos de área $dS = dx dy$ y de longitud dL ,

$$M_S = \int_S dm = \int_{A_S} \sigma(\mathbf{r}) dS$$

y asimismo,

$$M_L = \int_L dm = \int_{L_S} \lambda(\mathbf{r}) dL$$

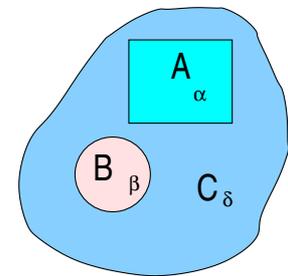


Figura 5.2: Sólido compuesto de tres partes (A, B, C) con tres tipos de partículas (α, β, δ).

Obviamente las integrales están extendidas respectivamente sobre el área A_S y la longitud L_S del cuerpo considerado, para una placa tendremos,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M_S} \int_{A_S} \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) dS \quad \text{y en el caso del alambre,} \quad \mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M_L} \int_{L_S} \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dL$$

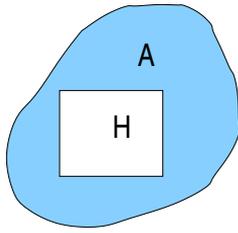
5.1.1. Cálculo de centros de masas

En el caso de sólidos homogéneos o cuerpos compuestos de varios sólidos homogéneos el cálculo de la integral 5.1 se simplifica y el centro de masas puede determinarse mediante la aplicación de unas reglas sencillas.

Si un sólido se compone de varias partes, la posición de su CM se obtiene considerando cada elemento como una partícula puntual, cuya masa es igual a la del elemento considerado situada en su correspondiente centro de masas.

Como se ve en la Fig. 5.2 la masa del cuerpo será la suma de la de sus elementos,

$$M = \sum_{\alpha=1}^{N_{\alpha}} m_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} m_{\beta} + \sum_{\delta=1}^{N_{\delta}} m_{\delta} = M_A + M_B + M_C$$



donde N_{α} , N_{β} y N_{δ} son el número de partículas de cada especie y la posición del centro de masas de cada uno de sus elementos será \mathbf{R}_{CM}^A , \mathbf{R}_{CM}^B y \mathbf{R}_{CM}^C . Con la definición de centro de masas,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \left(\sum_{\alpha=1}^{N_{\alpha}} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} m_{\beta} \mathbf{r}_{\beta} + \sum_{\delta=1}^{N_{\delta}} m_{\delta} \mathbf{r}_{\delta} \right)$$

Figura 5.3: Sólido A con un hueco H. y multiplicando y dividiendo por la masa de cada una de las partes se obtiene,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{M_A \mathbf{R}_{CM}^A + M_B \mathbf{R}_{CM}^B + M_C \mathbf{R}_{CM}^C}{M_A + M_B + M_C}$$

Esta expresión es equivalente a descomponer el sólido en varias partes y calcular el centro de masas del conjunto como si cada uno de sus bloques fuese una partícula puntual, situada en la posición del CM correspondiente, cuya masa es igual a la de cada bloque.

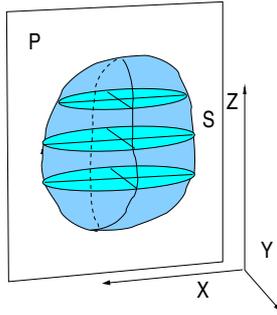


Figura 5.4: Sólido simétrico respecto del plano P.

La posición del centro de masas de un cuerpo con un hueco se obtiene combinando la posición del CM del cuerpo con la del hueco, relleno éste con la misma densidad de masa que el resto pero asignándole una masa negativa.

Si el hueco H del cuerpo de la Fig. 5.3 estuviese relleno su masa sería M_H y la del conjunto $M = M_A + M_H$. La posición del centro de masas \mathbf{R}_{CM} vendría dada por,

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{M_A \mathbf{R}_{CM}^A + M_H \mathbf{R}_{CM}^H}{M}$$

donde \mathbf{R}_{CM}^H representa la posición del CM del hueco relleno. Si despejamos \mathbf{R}_{CM}^A que es el vector que buscamos.

$$\mathbf{R}_{CM}^A = \frac{M \mathbf{R}_{CM} - M_H \mathbf{R}_{CM}^H}{M - M_H}$$

Como vemos, esta expresión es equivalente a calcular la posición del CM del cuerpo relleno \mathbf{R}_{CM} más el del hueco \mathbf{R}_{CM}^H pero asignándole una masa M_H negativa.

Si un sólido homogéneo tiene un plano de simetría, entonces el centro de masas se encuentra en dicho plano.

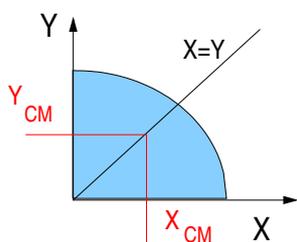


Figura 5.5: Centro de masas de una placa plana de radio R .

Supongamos que el sólido de la Fig. 5.4 compuesto por M partículas es simétrico respecto del plano P que hacemos coincidir con el plano (X, Z) como se observa en la Fig. 5.4.

Puesto que el cuerpo es simétrico N partículas se encuentran a uno y a otro lado del plano P y Q partículas estarán situadas sobre el plano X, Z , siendo $M = 2N + Q$. Por simetría, para cada una de las N masas m_α con coordenada y_α a un lado del plano existirá otra igual en el lado opuesto, con coordenada $-y_\alpha$ que será su imagen especular. La coordenada Y es nula para las Q partículas sobre el plano X, Z . Entonces, para la coordenada Y_{CM} tendremos,

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha y_\alpha$$

El centro de masas de un sólido **homogéneo** se encuentra en la intersección de sus elementos de simetría.

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha y_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (-y_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^Q m_\alpha (y_\alpha = 0) \right) = 0$$

Puede repetirse el mismo argumento para cualquier otro elemento de simetría, de modo que si un sólido homogéneo es simétrico respecto de dos planos, el centro de masas ha de encontrarse en el eje que forma la intersección de ambos. Podemos concluir que:

Para situar el centro de masas de placas planas o varillas **homogéneas** podemos emplear el siguiente teorema, que no demostraremos¹:

Teorema de Pappus-Guldin: Para una placa de área A (o varilla de longitud L) la distancia D_{CM} del centro de masas a un eje coplanario que no la corta satisface,

$$2\pi D_{CM} \times \begin{bmatrix} A \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ A_g \end{bmatrix}$$

en donde V_g es el volumen (área A_g) engendrado por la placa de área A (varilla de longitud L) al girar en torno al eje.

Ejemplos: En la placa plana de la Fig. 5.5 de radio R y densidad superficial de masa σ_o uniforme ha de tenerse $X_{CM} = Y_{CM}$ por simetría. Imaginemos que la hacemos rotar alrededor del eje X , utilizando el teorema anterior con $D_{CM} = X_{CM}$,

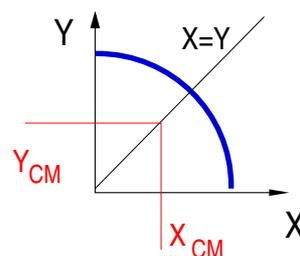


Figura 5.6: Centro de masas de una varilla circular de radio R .

¹La demostración se encuentra en el Capítulo 17, sección II, pags. 230-232 de la Ref. [5].

$$2\pi X_{CM} \times \left(\frac{1}{4} \times \pi R^2\right) = \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\right]$$

$$\text{luego, } Y_{CM} = X_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

Para el cuarto de círculo de alambre de radio R y densidad lineal de masa λ_o uniforme de la Fig. 5.5 también tendremos por simetría $X_{CM} = Y_{CM}$ y rotándolo alrededor del eje X ,

$$2\pi X_{CM} \times \left(\frac{1}{4} \times 2\pi R\right) = \left[\frac{1}{2} \times (4\pi R^2)\right] \text{ y tendremos, } Y_{CM} = X_{CM} = \frac{2R}{\pi}$$

5.2. Momentos de inercia

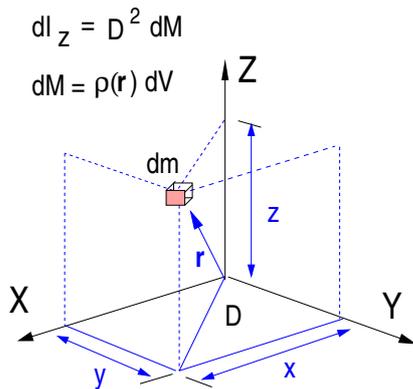


Figura 5.7: Distancia $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ del elemento de volumen dM al eje Z .

Los momentos de inercia de un sólido se definen respecto de un elemento geométrico, si D_α es la distancia de la partícula α al punto O (o distancia a un eje E , o al plano P) el momento de inercia I_O respecto de dicho punto (equivalentemente, I_E respecto del eje o I_P respecto del plano) es,

$$I_o = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha D_\alpha^2 \quad (5.2)$$

Por su definición los momentos de inercia son siempre cantidades *positivas* ($I > 0$) y *aditivas*. Si son calculados respecto del mismo elemento (plano, eje o punto) el momento de inercia total es $I_T = \sum_i I_i$, donde i indica cada una de las partes en que se divide el cuerpo.

La Ec. 5.2 se generaliza para un sólido continuo de modo semejante a la del centro de masas, tomando $dM = \rho(\mathbf{r}) dV$ y $dI_o = D^2 dM$ e integrando,

$$I_o = \int_{V_S} D^2 dM = \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}) D^2 dV$$

donde de nuevo D representa la distancia al punto, eje o plano (ver Fig. 5.7).

La intersección de dos planos perpendiculares P y P' define un eje E y tendremos obviamente que $I_E = I_P + I_{P'}$. Asimismo, la intersección de tres planos P, P' y P'' perpendiculares entre sí define un punto O , luego $I_o = I_P + I_{P'} + I_{P''}$. Si cada uno de los planos anteriores corresponde a uno de los tres que forman el triedro $S(O, X, Y, Z)$ multiplicando por dos la ecuación anterior,

$$2I_o = 2I_P + 2I_{P'} + 2I_{P''}$$

$$2 I_o = (I_P + I_{P'}) + (I_{P'} + I_{P''}) + (I_{P''} + I_P)$$

y resulta,

$$I_o = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

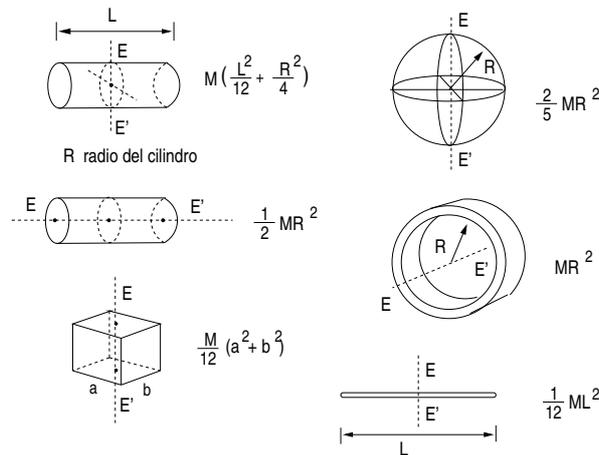


Figura 5.8: Momentos de inercia de algunos sólidos homogéneos calculados respecto del eje EE' indicado en cada figura.

5.2.1. Teorema de Steiner

Los momentos de inercia de los sólidos homogéneos más comunes se muestran en la Figura 5.8 y están calculados respecto de un eje que pasa por su centro de masas. Sin embargo, necesitamos con frecuencia conocer el momento de inercia respecto de otro eje paralelo, para calcularlo se emplea el *teorema de Steiner*.

Como vemos en la Fig. 5.9 las distancias Z_α y Z'_α son las distancias de la partícula de masa m_α a los planos P y P' paralelos y separados una distancia D . Se tiene $Z'_\alpha = Z_\alpha + D$ y el momento de inercia respecto del plano P' será,

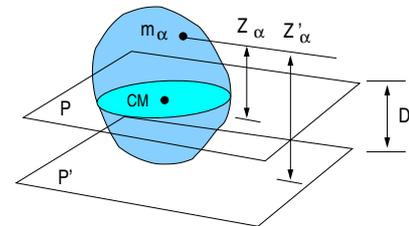


Figura 5.9: Teorema de Steiner para planos.

$$I_{P'} = \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} Z'_{\alpha}{}^2$$

Sustituyendo la distancia $Z'_{\alpha} = Z_{\alpha} + D$,

$$I_{P'} = \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} Z_{\alpha}^2 + \left(\sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \right) D^2 + 2D \left(\sum_{\alpha}^N m_{\alpha} Z_{\alpha} \right)$$

El primer sumando es el momento de inercia I_P respecto del plano P y el tercero es nulo por contener P el centro de masas con lo cual obtenemos (*teorema de Steiner para planos*),

$$I_{P'} = I_P + M D^2$$

Podemos emplear este resultado para los dos ejes paralelos definidos por la intersección de los tres planos perpendiculares de la Fig. 5.10. Tendremos,

$$I_{E'} = I_{P'} + I_{P''} \quad \text{y} \quad I_E = I_P + I_{P''}$$

restando ambas ecuaciones, $I_{E'} - I_E = I_{P'} - I_P = M D^2$ se tiene el *teorema de Steiner para ejes*,

$$I_{E'} = I_E + M D^2$$

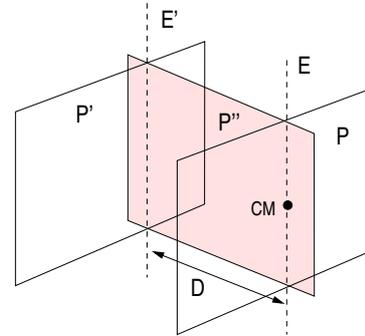


Figura 5.10: Teorema de Steiner para ejes.

Teorema de Steiner: *El momento de inercia respecto de un plano P' (eje E') es la suma del momento de inercia respecto de otro plano P (eje E) paralelo que contenga al centro de masas, más el producto de la masa M del cuerpo por la distancia D al cuadrado entre ambos planos (ejes).*

6.1. Movimiento de un sólido rígido

La posición de un sólido rígido ideal respecto de un triedro $S(O, X, Y, Z)$ se encuentra completamente especificada si consideramos otro triedro $S'(O', X', Y', Z')$ que se mueve con el sólido y en donde las posiciones \mathbf{r}'_α de todas las $\alpha = 1, 2, \dots, N$ partículas son constantes en el tiempo como se muestra en la Fig. 6.1.

La orientación de los ejes de este triedro móvil S' respecto del fijo S nos proporciona tres ángulos independientes que, junto con las tres componentes de la posición $\mathbf{r}_{OO'}$, resultan un total de seis cantidades que hemos de determinar para describir su movimiento.

Puesto que el sólido rígido ideal es indeformable, las velocidades de las partículas en el triedro S' son nulas ($\mathbf{v}'_\alpha = 0$) y sus velocidades \mathbf{v}_α respecto de S pueden determinarse mediante la Ec. 2.6,

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_\alpha \quad (6.1)$$

si consideramos un segundo punto β del sólido tendremos $\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}'_\beta = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$ luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge [\mathbf{r}'_\beta + (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)] \\ \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}_\beta + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \end{aligned} \quad (6.2)$$

siendo $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\Omega}_{S'S} \wedge \mathbf{r}'_\beta$. La Ec. 6.2 relaciona las velocidades respecto del triedro S de dos puntos cualesquiera del sólido ¹.

¹Una relación análoga se obtiene para las aceleraciones. Sobre este punto puede repasarse la sección 2.3.2 en la pag. 12.

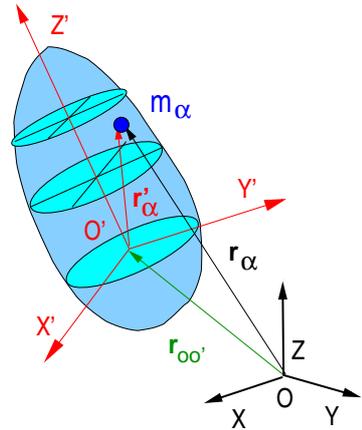


Figura 6.1: Triedro S' que se mueve con el sólido rígido S

La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{S'S}$ en la Ec. 6.2 es la misma para todos los puntos α y β en cada instante de tiempo e independiente de la elección del sistema coordenado S' ligado al sólido. Todos los posibles triedros coordenados S' que se mueven con el sólido giran en todo instante de tiempo alrededor del mismo eje con idéntica velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{S'S} = \boldsymbol{\omega}$ que denominaremos *velocidad angular del sólido*.

Si efectuamos el producto escalar con $\boldsymbol{\omega}$ en ambos lados de la Ec. 6.2 entonces $\mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_\beta \cdot \boldsymbol{\omega}$. Es decir, la proyección del vector velocidad de todas las partículas del sólido a lo largo de la dirección de la velocidad angular es la misma.

En consecuencia, podemos considerar que un sólido rígido ideal es un sistema de partículas cuyas velocidades en el triedro S se encuentran relacionadas mediante la Ec. 6.2. Un ejemplo de esta propiedad fué discutido en la Sec. 2.3.2 cuando analizamos el movimiento de una barra que se mueve sobre un plano girando alrededor de uno de sus extremos.

6.2. Movimiento del centro de masas

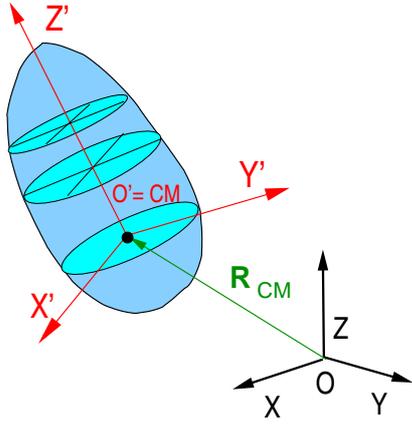


Figura 6.2: Movimiento del CM de un sólido respecto del triedro S .

Para el movimiento del centro de masas del sólido podemos emplear las Ecs. 4.5 y 4.6 que obtuvimos previamente por tratarse de un sistema de partículas. Para calcular la trayectoria \mathbf{R}_{CM} del CM del sólido respecto de un triedro S' (no necesariamente inercial) tendremos,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = \mathbf{F}_T \quad (6.3)$$

y para la energía cinética del CM,

$$\left[\frac{M}{2} V_{CM}^2 \right]_a^b = \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_T \cdot \mathbf{V}_{CM}) dt$$

$$\Delta E_{CM} = \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} = W_{CM} \quad (6.4)$$

en donde \mathbf{F}_T será la resultante aplicada en el CM de las fuerzas que actúan sobre el sólido.

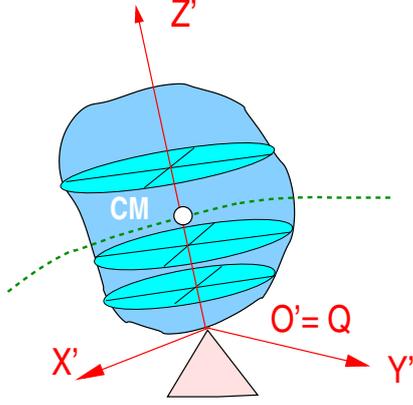
Hay que subrayar que las ecuaciones 6.3 y 6.4 son idénticas a las Ecs. 3.11 y 3.15 para la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ y energía cinética E_c de una partícula. En consecuencia, la dinámica de un punto material ideal que analizamos en el Cap. 3 puede entenderse como el estudio del movimiento del CM de un sólido donde hemos hecho abstracción de sus dimensiones físicas considerando sólo su movimiento de traslación e ignorando sus movimientos de rotación alrededor del CM.

6.3. Momento cinético del sólido rígido

Para describir los movimientos de rotación del sólido hemos de considerar los momentos de las fuerzas aplicadas en distintos puntos del mismo. Asimismo tendremos que introducir en la Ec. 4.11 la expresión que relaciona (Ec. 6.2) las velocidades de los distintos puntos del sólido.

El momento cinético (Ec. 4.11) de un sistema de partículas respecto de un punto A es,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A) \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$



En lo que sigue vamos a considerar dos elecciones particulares para dicho punto A , que será, o bien un *punto fijo o pivote* ($A \equiv Q$) del sólido, o su centro de masas ($A \equiv CM$). Como se observa en las Figs. 6.2 y 6.3 el CM tiene velocidad nula respecto de S' y en general $\mathbf{V}_{CM} \neq 0$ respecto de S mientras que el punto de apoyo Q (pivote) tiene velocidad nula $\mathbf{v}_Q = 0$ respecto de S' y S .

En la Fig. 6.1 vemos que para cualquier partícula α del sólido tenemos (Ec. 6.1),

$$\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A$$

Figura 6.3: Movimiento con un punto fijo $Q \equiv O'$ o pivote respecto del que se mueve el CM.

y las velocidades respecto de S se encuentran relacionadas mediante, $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_A)$ luego,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}'_\alpha \wedge m_\alpha [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha] = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \right) \wedge \mathbf{v}_A + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha)$$

Las dos elecciones anteriores para el punto A hacen nulo el primer sumando, si $A \equiv CM$, entonces $\sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0$ y en el caso de ser un punto de apoyo o pivote ($A \equiv Q$) se tiene $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_A = 0$ con lo que resulta en ambos casos,

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (|\mathbf{r}'_\alpha|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_\alpha) \mathbf{r}'_\alpha) \quad (6.5)$$

Si desarrollamos esta ecuación,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A = & \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [r'^2_\alpha \omega_{x'} - (x'_\alpha \omega_{x'} + y'_\alpha \omega_{y'} + z'_\alpha \omega_{z'}) x'_\alpha] \mathbf{i}' + \\ & \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [r'^2_\alpha \omega_{y'} - (x'_\alpha \omega_{x'} + y'_\alpha \omega_{y'} + z'_\alpha \omega_{z'}) y'_\alpha] \mathbf{j}' + \\ & \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [r'^2_\alpha \omega_{z'} - (x'_\alpha \omega_{x'} + y'_\alpha \omega_{y'} + z'_\alpha \omega_{z'}) z'_\alpha] \mathbf{k}' \end{aligned}$$

Podemos agrupar las tres componentes de este vector y para la coordenada X' resulta,

$$(L_A)_x = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (r'^2_\alpha - x'^2_\alpha) \right) \omega_{x'} - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha x'_\alpha y'_\alpha \right) \omega_{y'} - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha x'_\alpha z'_\alpha \right) \omega_{z'}$$

y expresiones análogas se encuentran para $(L_A)_y$ y $(L_A)_z$. Puesto que $d_\alpha^2 = y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2$ es la distancia de m_α al eje X' tendremos,

$$I_{x'x'} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (r_\alpha'^2 - x_\alpha'^2) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d_\alpha^2 \quad (6.6)$$

que coincide con la expresión (Ec. 5.2) del *momento de inercia respecto del eje X'* . Asimismo se definen los *productos de inercia* como,

$$I_{x'y'} = - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha x_\alpha' y_\alpha' \quad I_{x'z'} = - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha x_\alpha' z_\alpha' \quad (6.7)$$

Pueden encontrarse expresiones análogas para las otras dos componentes a lo largo de los ejes Y' y Z' . Todas estas definiciones se generalizan considerando el sólido como un medio continuo como se hizo en la Pág. 48 mediante el cambio $dM = \rho(\mathbf{r}) dV$,

$$I_{x'x'} = \int_V (y'^2 + z'^2) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

y los productos

$$I_{x'y'} = - \int_V \rho(\mathbf{r}') x' y' dV' \quad I_{x'z'} = - \int_V \rho(\mathbf{r}') x' z' dV'$$

donde las integrales se toman sobre todo el volumen V del sólido.

El vector momento cinético es entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A = & (I_{x'x'} \omega_{x'} + I_{x'y'} \omega_{y'} + I_{x'z'} \omega_{z'}) \mathbf{i}' + (I_{y'x'} \omega_{x'} + I_{y'y'} \omega_{y'} + I_{y'z'} \omega_{z'}) \mathbf{j}' + \\ & + (I_{z'x'} \omega_{x'} + I_{z'y'} \omega_{y'} + I_{z'z'} \omega_{z'}) \mathbf{k}' \end{aligned}$$

Esta última ecuación puede escribirse de modo más compacto como $\mathbf{L}_A = \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega}$, utilizando notación matricial,

$$\begin{pmatrix} L_{Ax'} \\ L_{Ay'} \\ L_{Az'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

La matriz \mathbf{I} se denomina *tensor de inercia* y de las definiciones de sus elementos, los productos de inercia (Ec. 6.7) y momentos respecto de los ejes, X' , Y' y Z' (Ec. 6.6) es evidente que es *simétrica*, $I_{ij} = I_{ji}$. Además, los elementos de la matriz \mathbf{I} están evaluados en el triedro S' y sólo dependen de la distribución de las masas m_α del sólido y no de su movimiento.

Puede demostrarse que existe una elección determinada del triedro S' en la que el tensor de inercia \mathbf{I} toma su forma más sencilla reduciéndose a una matriz diagonal. Para estos ejes particulares ² denominados *ejes principales de inercia*, los productos de inercia son nulos,

$$I_{ii} > 0 \quad \text{e} \quad I_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

También se demuestra la siguiente propiedad,

Las direcciones de los ejes principales de inercia en un sólido homogéneo se corresponden con la intersección de sus planos de simetría y la intersección de los tres ejes principales tiene lugar en el CM del cuerpo.

²Los detalles se estudiarán en cursos posteriores y son consecuencia de las propiedades matemáticas del tensor de inercia. Sobre este punto puede consultarse la sección 9.13.

La Ec. 6.8 evidencia que los vectores \mathbf{L}_A y $\boldsymbol{\omega}$ *no son en general paralelos*, incluso cuando el tensor de inercia \mathbf{I} toma forma diagonal ya que los valores de $I_{x'x'}$, $I_{y'y'}$ e $I_{z'z'}$ suelen ser diferentes. Si empleamos los ejes principales de inercia tendremos,

$$\mathbf{L}_{CM} = I_{x'x'} \omega_{x'} \mathbf{i}' + I_{y'y'} \omega_{y'} \mathbf{j}' + I_{z'z'} \omega_{z'} \mathbf{k}' \quad (6.9)$$

6.4. Dinámica de rotación

Las cantidades que aparecen en la expresión 6.8 para el momento cinético están expresadas en un triedro S' que se mueve con el cuerpo donde las coordenadas \mathbf{r}'_α de sus partículas permanecen constantes en el tiempo. Vamos a emplear dicho triedro S' para encontrar una ecuación para describir la dinámica de rotación del sólido.

La derivada respecto del tiempo $(d\mathbf{L}_A/dt)_S = \mathbf{M}_A$ en el triedro S es igual (Ec. 3.20) a la suma vectorial \mathbf{M}_A de los momentos $\mathbf{M}_{A,k}$ respecto del punto A de las $k = 1, 2, \dots, P$ fuerzas aplicadas al cuerpo en los puntos \mathbf{r}'_k . Empleando la Ec. 4.13 podemos evaluar el valor de $(d\mathbf{L}_A/dt)_S$ en el triedro S' ,

$$\mathbf{M}_A = \sum_{k=1}^P \mathbf{M}_{A,k} = \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_A \quad (6.10)$$

Si tomamos ahora como origen de S' el CM del sólido y escogemos los ejes (X', Y', Z') a lo largo de los ejes principales de inercia del mismo, en la Ec. 6.10 con $A \equiv CM$ resulta,

$$\mathbf{M}_{CM} = \left(\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_{CM}$$

Puesto que los coeficientes del tensor de inercia \mathbf{I} son constantes en el triedro S' substituyendo la Ec. 6.9 resulta,

$$\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} = I_{x'x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + I_{y'y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} \mathbf{k}'$$

y el producto vectorial es,

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_{CM} = (\omega_{y'} L_{z'} - \omega_{z'} L_{y'}) \mathbf{i}' + (\omega_{z'} L_{x'} - \omega_{x'} L_{z'}) \mathbf{j}' + (\omega_{x'} L_{y'} - \omega_{y'} L_{x'}) \mathbf{k}'$$

Finalmente, introduciendo las componentes de \mathbf{L}_{CM} (Ec. 6.9) se llega al siguiente sistema de ecuaciones ³ para el movimiento de rotación de un sólido,

$$I_{x'x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'z'} - I_{y'y'}) \omega_{z'} \omega_{y'} = M_{x'} \quad (6.11)$$

$$I_{y'y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'x'} - I_{z'z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} = M_{y'} \quad (6.12)$$

$$I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'y'} - I_{x'x'}) \omega_{y'} \omega_{x'} = M_{z'} \quad (6.13)$$

³Son denominadas *ecuaciones de Euler*.

Si se mantiene un punto fijo $A \equiv Q$ ($\mathbf{v}_Q = 0$ respecto de S) durante el movimiento del cuerpo no coinciden necesariamente el CM del sólido y el origen A del triedro S' (ver Fig. 6.3) por lo que volviendo a la Ec. 6.10 tendremos,

$$\mathbf{M}_Q = \left(\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_Q \quad (6.14)$$

donde $\mathbf{L}_Q = \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega}$ y el punto Q ha de tomarse como origen para el cálculo de momentos y productos de inercia así como de los momentos de las fuerzas aplicadas. La relación entre \mathbf{L}_Q y \mathbf{L}_{CM} resulta de la Ec. 4.12,

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{L}_{CM} + (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_Q) \wedge M\mathbf{V}_{CM}$$

Tanto en el caso del movimiento con un punto fijo ($A \equiv Q$) como empleando el CM ($A \equiv CM$) el análisis general de las soluciones del sistema de ecuaciones 6.11-6.13 y 6.14 exceden el ámbito del presente curso por lo que sólo estudiaremos el caso particular del denominado *movimiento plano*.

6.4.1. Energía cinética

Calculamos ahora la energía cinética E_c del sólido como suma de las energías cinéticas de cada uno de sus puntos de masa m_α y velocidad $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha$. De nuevo un punto A del mismo (origen de S') será el CM del sólido o un punto fijo Q ,

$$E_c = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha] \cdot [\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha]$$

$$E_c = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \frac{v_A^2}{2} + \mathbf{v}_A \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \right)] + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha|^2$$

El segundo sumando es nulo tanto si A es el CM ($\sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0$) como si es un pivote o un punto en reposo ($\mathbf{v}_A = 0$). Por último, si hacemos $\mathbf{C} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha$ entonces,

$$|\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha|^2 = \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_\alpha \wedge \mathbf{C}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_\alpha \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha])$$

y la ecuación para la energía cinética resulta,

$$E_c = \frac{M v_A^2}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_\alpha) \right)$$

donde el término entre paréntesis es justamente \mathbf{L}_A (término de la izquierda de Eq. 6.5) por lo que resulta finalmente,

$$E_c = \frac{M v_A^2}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_A \quad (6.15)$$

De acuerdo con las dos posibles elecciones para A esta ecuación engloba dos casos diferentes. Si A es el centro de masas,

$$E_c = \frac{M}{2} V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{CM} \quad (A \equiv CM) \quad (6.16)$$

El primer sumando representa la *energía cinética de translación* del CM del sólido y el segundo la *energía cinética de rotación* alrededor del CM del mismo. Cuando A es un punto Q en reposo respecto de S entonces $\mathbf{v}_Q = 0$ y se reduce a,

$$E_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_Q \quad (A \equiv Q \text{ en reposo en } S) \quad (6.17)$$

no hay energía de translación de Q sino exclusivamente de rotación alrededor del pivote o punto fijo.

6.4.2. Ecuación de la energía

Si derivamos respecto del tiempo la ec. 6.15 tendremos,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv_A^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_S \cdot \mathbf{L}_A + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_S \quad (6.18)$$

y vamos a ver que los dos últimos sumandos son iguales. Empleando la Ec. 2.4 con $\mathbf{q} \equiv \mathbf{L}_A$ resulta evidente que $\boldsymbol{\omega} \cdot (d\mathbf{L}_A/dt)_S = \boldsymbol{\omega} \cdot (d\mathbf{L}_A/dt)_{S'}$, además,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} = \sum_i \omega_i \left(\frac{L_{A,i}}{dt} \right)_{S'} = \sum_i \omega_i \sum_j \frac{d}{dt} (I_{ij} \omega_j)$$

Como el tensor de inercia es simétrico ($I_{ij} = I_{ji}$) y sus componentes son constantes en el tiempo en S' ,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} = \sum_i \sum_j \omega_i I_{ij} \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S'} = \sum_j \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S'} \sum_i \omega_i I_{ji} = \sum_j \left(\frac{d\omega_j}{dt} \right)_{S'} L_{A,j}$$

Finalmente, como las derivadas de $\boldsymbol{\omega}$ respecto del tiempo (Ec. 2.5) son iguales en S y S' ,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_{S'} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{S'} \cdot \mathbf{L}_A = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_S \cdot \mathbf{L}_A$$

sustituyendo en la Ec. 6.18 resulta,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv_A^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \right)_S$$

y como $(d\mathbf{L}_A/dt)_S = \mathbf{M}_A$ finalmente,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv_A^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_A \quad (6.19)$$

Ahora examinamos las dos posibles elecciones para el punto A :

- Cuando tomamos un punto fijo $A \equiv Q$ en la Ec. 6.19 como $\mathbf{v}_Q = 0$ tendremos,

$$\Delta E_c = \left[\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_Q}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_Q dt \quad (A \equiv Q \text{ en reposo en } S) \quad (6.20)$$

y el cambio de la energía cinética será debido exclusivamente al momento del sistema de fuerzas aplicadas al sólido \mathbf{M}_Q calculado *respecto del punto en reposo* Q en este caso.

- Si $A \equiv CM$ en la Ec. 6.19 podemos emplear las Ecs. 6.4 y 6.10 para sustituir las derivadas respecto del tiempo,

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F}_T \cdot \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{CM}$$

que integrada respecto del tiempo nos proporciona la variación de la energía cinética ΔE_c del sólido entre dos instantes,

$$\Delta E_c = \left[\frac{MV_{CM}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{CM}}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} + \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{CM} dt \quad (A \equiv CM) \quad (6.21)$$

El primer sumando corresponde al trabajo W_{CM} de la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo \mathbf{F}_T en el CM (Ec. 6.4) y el segundo el trabajo efectuado por el momento \mathbf{M}_{CM} del sistema de fuerzas aplicadas al cuerpo calculado *respecto del* CM .

Podemos comprender el significado del trabajo del momento del sistema de fuerzas aplicadas al sólido mediante otro argumento equivalente. Reemplazando en la Ec. 6.19 el momento \mathbf{M}_A por su expresión (Ec. 4.13) en el producto $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_A$,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv_A^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}'_{\alpha} \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \right]$$

operando el paréntesis,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}'_{\alpha} \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha})] = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha}) \cdot (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha})$$

y como $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_A$ (Ec. 6.2) resulta,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv_A^2}{2} \right) + \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_A)$$

De nuevo hay que examinar los dos casos posibles para el punto A ,

- Si es un punto $A \equiv Q$ en reposo $\mathbf{v}_Q = 0$,

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot \mathbf{v}_{\alpha}$$

Si integramos esta ecuación entre dos instantes de tiempo t_a y t_b y utilizamos la ec. 6.17,

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} \mathbf{L}_Q \cdot \boldsymbol{\omega} \right]_{t_a}^{t_b} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbf{r}_{\alpha a}}^{\mathbf{r}_{\alpha b}} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (A \equiv Q \text{ en reposo en } S) \quad (6.22)$$

La variación de la energía cinética del sólido es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas sobre cada partícula α del sólido. Esta expresión es idéntica a la Ec. 6.20 anterior solo que el trabajo de las fuerzas aplicadas aparece igual que en la definición anterior del trabajo de una fuerza (Ec. 3.12) donde las posiciones \mathbf{r}_α se toman respecto del punto Q . Como vemos, este trabajo puede calcularse mediante la Ec. 6.22 o empleando el momento del sistema de fuerzas \mathbf{M}_Q como en la Ec. 6.20.

- Si consideramos el centro de masas, ($A \equiv CM$) como $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_{CM}$ es la velocidad de las partículas relativas al triedro del CM entonces,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{MV_{CM}^2}{2} \right) + \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot \mathbf{w}_\alpha$$

e integrando en el tiempo,

$$\Delta E_c = \left[\frac{MV_{CM}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} + \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbf{r}_{\alpha,a}}^{\mathbf{r}_{\alpha,b}} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha \quad (A \equiv CM) \quad (6.23)$$

La variación de la energía cinética es entonces igual a la de traslación del centro de masas más la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas sobre cada partícula α que se calculan empleando las posiciones \mathbf{s}_α relativas al centro de masas. Podemos sustituir en esta ecuación la variación de la energía cinética del CM por el trabajo de las fuerzas (Ec. 4.6) y la variación de la energía cinética del CM por la Ec. 6.16,

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \left[\frac{M}{2} V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{CM} \right]_{t_a}^{t_b} = \\ &= \int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbf{r}_{\alpha,a}}^{\mathbf{r}_{\alpha,b}} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha \quad (A \equiv CM) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Finalmente, si eliminamos en esta última ecuación la energía cinética del CM puesto que se cancela con el trabajo de la resultante \mathbf{F}_T y resulta para la energía de rotación,

$$\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{CM} \right]_{t_a}^{t_b} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbf{r}_{\alpha,a}}^{\mathbf{r}_{\alpha,b}} (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) \cdot d\mathbf{s}_\alpha = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{CM} dt$$

Esta última ecuación es análoga a la energía de rotación alrededor de un punto fijo (Ec. 6.22) en la que el momento cinético se toma respecto del CM del sistema. Podemos entonces entender la Ec. 6.24 como la suma de una energía de traslación del CM del sólido más la energía cinética de rotación alrededor del CM. La primera es debida al trabajo de la resultante en el CM de las fuerzas aplicadas \mathbf{F}_T mientras que a la energía de rotación contribuyen los trabajos respecto del CM de las fuerzas aplicadas sobre cada partícula individual .

6.5. Movimiento plano

El *movimiento plano* de un sólido rígido es un caso particular del movimiento general de un sólido en el espacio. Definimos el *movimiento plano* de un sólido como aquel en el que *en todo instante de tiempo la dirección de la velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\omega}$ se mantiene paralela a una dirección fija y para toda partícula α del mismo se tiene también que $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0$* .

Si tomamos la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ como eje Z los versores \mathbf{k} y \mathbf{k}' serán siempre paralelos, y multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k} = \omega_{z'} \mathbf{k}'$ en ambos lados de la Ec. 6.2, tendremos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}_\beta = 0$. En consecuencia, las trayectorias de todos los puntos del sólido son curvas contenidas en planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje Z .

Un ejemplo de movimiento plano se muestra en la Fig. 6.4 en donde el sólido S gira alrededor de un eje EE' que no es eje principal de inercia (no contiene al CM). Todas sus partículas se mueven en planos perpendiculares a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ paralela al eje de rotación, donde aparecen las reacciones \mathbf{R}_z , \mathbf{R}_y y \mathbf{R}_x , ésta última perpendicular al papel.

De la definición del movimiento plano tendremos $\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0$ y empleando la Ec. 6.8,

$$\mathbf{L}_A = I_{x'z'} \omega_{z'} \mathbf{i}' + I_{y'z'} \omega_{z'} \mathbf{j}' + I_{z'z'} \omega_{z'} \mathbf{k}' = (I_{x'z'} \mathbf{i}' + I_{y'z'} \mathbf{j}' + I_{z'z'} \mathbf{k}') \omega_{z'} \quad (6.25)$$

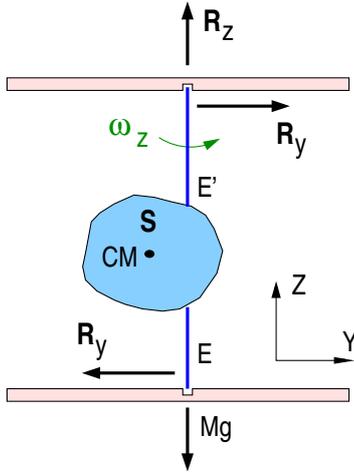


Figura 6.4: El sólido S rota sin rozamiento alrededor del eje Z paralelo al EE' .

donde los productos de inercia $I_{x'z'}$ y $I_{y'z'}$ no son nulos en general puesto que el sólido no tiene porqué rotar alrededor de un eje principal de inercia. Para el movimiento del CM (Ec. 4.5) tendremos,

$$M \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = \mathbf{F}_T$$

siendo $(\mathbf{F}_T)_z = 0$. Con el momento cinético \mathbf{L}_A de la Ec. 6.25 para la dinámica de la rotación (Ec. 6.10),

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_A = \omega_{z'}^2 I_{x'z'} \mathbf{j}' - \omega_{z'}^2 I_{y'z'} \mathbf{i}'$$

y las ecuaciones de Euler 6.11, 6.12 y 6.13 son las siguientes,

$$I_{x'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} - I_{y'z'} \omega_{z'}^2 = M_{Ax'} \quad (6.26)$$

$$I_{y'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + I_{x'z'} \omega_{z'}^2 = M_{Ay'} \quad (6.27)$$

$$I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} = M_{A,z'} \quad (6.28)$$

Empleando 6.25 en el movimiento plano tendremos $\mathbf{L}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = I_{z'z'} \omega_{z'}^2$, con lo que la expresión 6.15 para la energía cinética se simplifica,

$$E_c = \frac{M V_A^2}{2} + \frac{1}{2} I_{z'z'} \omega_{z'}^2$$

De nuevo hemos de especificar una elección para el punto A que puede ser de nuevo el CM del sistema o un punto fijo Q del movimiento que en el caso de la Fig. 6.4 puede ser cualquiera a lo largo del eje EE' .

La ecuación de la energía 6.21 para el CM del sólido resulta ser ahora,

$$\Delta E_c = \left[\frac{MV_{CM}^2}{2} + \frac{I_{z'z'} \omega_{z'}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{R}_{CM} + \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{M}_{CM})_z \omega_z dt \quad (A \equiv CM)$$

y respecto de un punto fijo Q del sólido la Ec. 6.22 es simplemente,

$$\Delta E_c = \left[\frac{I_{z'z'} \omega_{z'}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{M}_Q)_{z'} \omega_{z'} dt \quad (A \equiv Q \text{ en reposo en } S)$$

Si multiplicamos por $\omega_{z'} = d\theta/dt$ e integramos entre dos instantes de tiempo t_a y t_b tendremos,

$$\left[\frac{I_{z'z'} \omega_{z'}^2}{2} \right]_{t_a}^{t_b} = \int_{\theta_a}^{\theta_b} M_{z'} d\theta \quad (6.29)$$

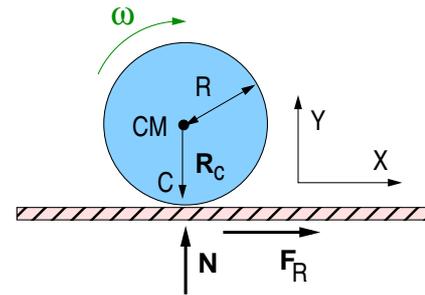
en donde θ_a y θ_b son los ángulos que corresponden al giro del sólido alrededor del eje Z entre dichos instantes. Las ecuaciones 6.26 y 6.27 permiten determinar las reacciones \mathbf{R}_x y \mathbf{R}_y (ver Fig. 6.4) a partir de los momentos correspondientes una vez que hemos encontrado $\omega_{z'}(t)$.

6.5.1. Rodadura plana

Un ejemplo importante de movimiento plano es el de un sólido de sección circular de radio R sobre una superficie plana, como se muestra en la Fig. 6.5. Respecto a unos ejes ligados a la superficie la velocidad del centro de masas C del disco será $\mathbf{V}_{CM} = V_{CM} \mathbf{i}$ y la velocidad y aceleración del punto de contacto C en unos ejes ligados al disco son,

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}_c = (V_{CM} - \omega R) \mathbf{i} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c &= \mathbf{A}_{CM} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}_c) \\ \mathbf{a}_c &= \frac{d}{dt} (V_{CM} - \omega R) \mathbf{i} + \omega^2 R \mathbf{j} \end{aligned}$$



Cuando $\mathbf{v}_c \neq \mathbf{0}$ se dice que el disco *desliza* aunque en general tengamos $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ y la fuerza de rozamiento es entonces $F_R = -\mu N$, que ha de ser opuesta a la velocidad del punto C . Por el contrario cuando $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$ entonces $V_{CM} = \omega R$, decimos que el disco *rueda* y el rozamiento ha de ser menor que el de deslizamiento, $|F_R| < \mu N$. Nótese que la aceleración del punto de apoyo $\mathbf{a}_c \neq \mathbf{0}$ es siempre no nula, tanto cuando rueda como cuando desliza. Es obvio que el trabajo de la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v}_c < 0$ ha de ser negativo para que el sistema pierda energía.

Las ecuaciones de movimiento de translación del CM del sistema son,

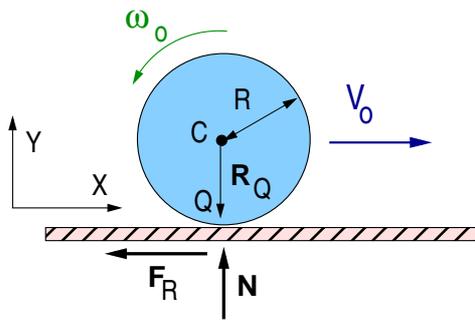
$$M \frac{dV_x}{dt} = (\mathbf{F}_T)_x \quad M \frac{dV_y}{dt} = (\mathbf{F}_T)_y$$

mientras que la Ec. 6.28 para la rotación alrededor del CM es,

$$I_{z'z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} = (\mathbf{M}_{CM})_{z'}$$

Para estudiar el movimiento a partir de un instante, suponemos que hay rodadura ($V_{CM} = \omega R$) y resolvemos el sistema de ecuaciones tomando la dirección de \mathbf{F}_R con sentido arbitrario y si resulta $|F_R| < \mu N$ entonces nuestra hipótesis inicial es correcta. En caso contrario existe deslizamiento con lo que $F_R = \mu N$

Ejemplo : Vamos a analizar el movimiento del disco de la figura 6.6 de masa M que parte en el instante inicial $t = 0$ con velocidad $\mathbf{V}_C = V_o \mathbf{i}$ y velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_o \mathbf{k}$. Para el punto Q tendremos,



$$\mathbf{V}_Q = (V_o + \omega_o R) \mathbf{i}$$

de modo que $V_o + \omega_o R \neq 0$ y el disco inicialmente desliza. La Ec. 4.5 para el movimiento del CM será,

$$\begin{aligned} M \frac{dV_{cx}}{dt} &= -F_R \\ M \frac{dV_{cy}}{dt} &= 0 = N - Mg \\ F_R &= \mu N \end{aligned}$$

Figura 6.6: El disco desliza en el instante inicial.

Inicialmente $v_Q \neq 0$ y el punto Q al rozar con el suelo le hace perder energía cinética al disco y para la rotación (Ec. 6.28 con $I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$) tendremos

$$I_{z'z'} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{F}_R = -R F_R \mathbf{k}$$

y puesto que las fuerzas son constantes en el tiempo podemos integrar las ecuaciones,

$$V_{cx} = V_o - \mu g t \quad \omega = \omega_o - \frac{2\mu g}{R} t$$

La velocidad $V_{cx}(t)$ del centro del disco y su velocidad angular decrecen en el tiempo a partir de su valor inicial por lo que en algún instante t_c se ha de tener que $V_c + \omega R = 0$ y el disco ha de pasar de deslizar a rodar. Substituyendo los valores anteriores encontramos que,

$$t_c = \frac{V_o + \omega_o R}{3\mu g}$$

A partir de este momento la ecuación para el rozamiento $F_R = \mu N$ deja de ser válida y ha de reemplazarse por la condición de rodadura $\mathbf{V}_Q = 0$. El movimiento del disco para $t > t_c$

tiene como condiciones iniciales las velocidad angular ω_c y del CM del disco V_c en el instante t_c cuando se inicia el nuevo movimiento,

$$V_c = \frac{2V_o - \omega_o R}{3} \quad \text{y,} \quad \omega_c = -\frac{2V_o - \omega_o R}{3R} = -\frac{V_c}{R}$$

Si en $t = 0$ se tiene $V_o > \omega_o R/2$ la velocidad inicial del CM del disco en $t = t_c$ es $V_c > 0$ y se moverá en el sentido positivo del eje X . Ha de cambiar entonces el sentido de la velocidad angular y $\omega_c < 0$ por lo que el disco rotará en sentido contrario al que se indica en la Fig. 6.6. Si por el contrario $V_o < \omega_o R/2$ se mantendrá en $t = t_c$ el sentido inicial de ω pero se invierte el de la velocidad del CM, $V_c < 0$ por lo que el disco vuelve rodando.

6.6. Estática

Hablamos de una posición de equilibrio de un sólido rígido cuando las fuerzas exteriores y de inercia que actúan sobre el mismo no son funciones prefijadas del tiempo y sus momentos respecto de un cierto punto Q forman un sistema de vectores deslizantes nulo,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = 0 \quad \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_Q) \wedge (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) = 0$$

En estas circunstancias, si un sólido se encuentra en esta posición con $\mathbf{V}_{CM} = 0$ y $\boldsymbol{\Omega} = 0$ en un cierto instante entonces dichos vectores serán nulos indefinidamente.

En general, para un sistema de partículas de masas m_α donde $\alpha = 1, \dots, N$ el equilibrio requiere que en un instante las velocidades \mathbf{v}_α sean nulas en una posición donde se cumpla que,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_{e\alpha} + \mathbf{F}_{I\alpha}) + \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0$$

para toda partícula α .

Decimos que un estado de equilibrio es *estable* cuando sometido a una pequeña perturbación el sistema oscila alrededor la posición del equilibrio inicial o *inestable* en caso contrario.

Para una partícula sometida a una fuerza conservativa $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$ los puntos donde $U(\mathbf{r})$ es mínimo serán puntos de *equilibrio estable*. Una partícula inicialmente en reposo en un punto \mathbf{r}_o donde $U(\mathbf{r}_o)$ es mínimo permanecerá con $\mathbf{v} = 0$ indefinidamente y si la desplazamos de dicha posición una distancia $|\delta\mathbf{r}|$, o equivalentemente, incrementamos su energía potencial una cantidad δU pequeña, se verá sometida a una fuerza recuperadora que tenderá a devolverla a la posición \mathbf{r}_o . Si su energía $E = E_{cin}(t) + U(t)$ se conserva la partícula oscilará alrededor del punto de equilibrio $\underline{\mathbf{r}}_o$ y tendremos,

$$U(\underline{\mathbf{r}}_o) \leq U(t) \leq U(\mathbf{r}_o) + \delta U$$

Cuando δU es pequeño, el sistema permanece cerca del punto de equilibrio y si $\delta U = 0$ hay equilibrio. En cambio, si su energía $E = E_{cin}(t) + U(t)$ decrece en el tiempo efectuará oscilaciones de amplitud decreciente hasta detenerse.

Los punto donde $U(\mathbf{r})$ presenta un máximo son de *equilibrio inestable*, una partícula en reposo en dicho punto permanecerá allí indefinidamente ya que la fuerza que actúa sobre ella

es nula. Sin embargo, si la alejamos de dicho punto una distancia $|\delta\mathbf{r}|$ la fuerza que actúa sobre ella tenderá a alejarla cada vez mas de dicha posición, que será de *equilibrio inestable*.

7.1. El oscilador armónico simple

Vamos a estudiar el movimiento sin rozamiento en una dimensión de un bloque de masa m unido a una pared por un muelle como el de la Fig. 3.3. Como vimos en la página 18 la fuerza que ejerce viene dada por la ley de Hooke $F_m = -K(x - L_o)$ de modo que su ecuación del movimiento es,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + K(x - L_o) = 0$$

y las soluciones de esta ecuación diferencial se obtienen haciendo primero el cambio de variable $s(t) = x(t) - L_o$ de modo que $\ddot{s}(t) = \ddot{x}(t)$,

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + Ks = 0. \tag{7.1}$$

Puede comprobarse que las soluciones de esta ecuación (oscilador armónico) son de la forma,

$$s(t) = A \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$$

y deshaciendo el cambio de variable,

$$x(t) = L_o + A \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$$

donde $\omega_o = \sqrt{K/m} = 2\pi/T_o$ es la *frecuencia* y T_o el *periodo* del movimiento oscilatorio que tiene lugar entre $x_{max} = L_o + A$ y $x_{min} = L_o - A$ como se indica en la Fig. 7.1.

Si calculamos $\dot{x}(t) = \omega_o A \cos(\omega_o t + \varphi)$ y particularizamos las funciones en el instante $t = 0$ siendo $x(0) = x_o$ y $\dot{x}(0) = v_o$,

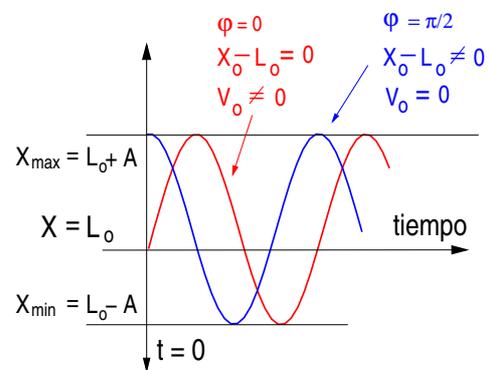
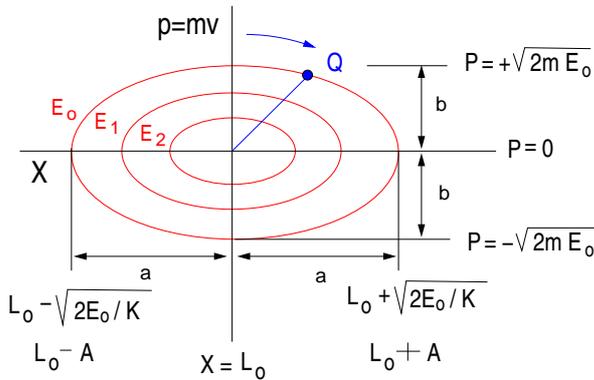


Figura 7.1: Movimiento oscilatorio para dos condiciones iniciales diferentes.

$$x_o = L_o + A \operatorname{sen}(\varphi) \quad v_o = \omega_o A \cos(\varphi) \quad (7.2)$$

vemos que la *amplitud* A y la *fase* φ vienen determinadas por la velocidad v_o y posición x_o iniciales del movimiento ¹.

En la Fig. 7.1 se ha representado las soluciones para dos situaciones diferentes. Cuando en el instante inicial $t_o = 0$ alejamos el oscilador de su posición de equilibrio tendremos $x_o - L_o \neq 0$ y si en este punto parte del reposo ($v_o = 0$) en las ecuaciones 7.2 resultará $\varphi = \pi/2$ y $A = x_o - L_o$. La solución en este caso es la función,



$$x(t) - L_o = (x_o - L_o) \cos(\omega_o t)$$

y como se ve en la Fig. 7.1 parte en $t = 0$ con pendiente (velocidad) nula $\dot{x}(0) = v_o$.

En cambio, si se encuentra en la distancia de equilibrio del oscilador $x_o = L_o$ y le comunicamos una velocidad inicial $v_o \neq 0$ obtendremos $\varphi = 0$, $A = v_o/\omega_o$ y entonces,

Figura 7.2: Elipses de energía constante recorridas por la recta OQ en el sentido indicado.

$$x(t) = L_o + (v_o/\omega_o) \operatorname{sen}(\omega_o t)$$

El movimiento parte entonces del punto de equilibrio $x_o = L_o$ con pendiente inicial (velocidad) no nula. Para el caso más general obtenemos a partir de 7.2,

$$A^2 = (x_o - L_o)^2 + \frac{v_o^2}{\omega_o^2} \quad \tan(\varphi) = (x_o - L_o) \frac{\omega_o}{v_o} \quad (7.3)$$

que permiten determinar A y φ a partir de dos condiciones iniciales (x_o, v_o) cualesquiera.

Como vemos, para alejar la masa m de su estado de equilibrio hay que comunicarle una energía inicial E_o , bien en forma de energía potencial elástica ($x_o \neq L_o, v_o = 0$), bien aportando una energía cinética inicial ($x_o = L_o, v_o \neq 0$) o una combinación de ambas.

No obstante, el movimiento siempre será oscilatorio con periodo $T_o = 2\pi/\omega_o$ y para una velocidad y posición inicial cualesquiera (x_o, v_o) su energía inicial será,

$$E_o = \frac{m v_o^2}{2} + \frac{K}{2} (x_o - L_o)^2 \quad (7.4)$$

y puesto que no existe rozamiento es constante en todo instante,

$$E(t) = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{K}{2} (x(t) - L_o)^2 = E_o$$

¹Como ya hemos visto en las Pags. 14 y 88 para determinar las constantes A y φ necesitamos conocer la posición y velocidad en un instante cualquiera $t = t_o$ pero tomamos aquí $t = 0$ para simplificar.

donde $p(t) = m v(t)$ es la cantidad de movimiento. Mediante un cambio de variable esta última ecuación resulta ser la de una elipse en el plano (x, p) ² como muestra la Fig. 7.2,

$$\frac{p^2}{2mE_o} + \frac{(x - L_o)^2}{2E_o/K} = 1$$

donde comparando con la Ec. 9.8 se encuentran las siguientes relaciones entre los parámetros de la elipse y los del movimiento oscilatorio,

$$\begin{aligned} p^2 &\rightarrow (y - y_o)^2 & b^2 &\rightarrow 2mE_o \\ (x - L_o)^2 &\rightarrow (x - x_o)^2 & a^2 &\rightarrow 2E_o/K \end{aligned}$$

Fijada la energía E_o todas las posiciones $x(t)$ y velocidades $v(t)$ que son solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico 7.1 han de encontrarse a lo largo de la elipse que representa la curva de energía $E = E_o$ constante de la Fig. 7.2. Como vemos el valor de la energía inicial $E_o = E(t)$ determina el tamaño de la elipse que disminuye para energías menores $E_2 < E_1 < E_o$.

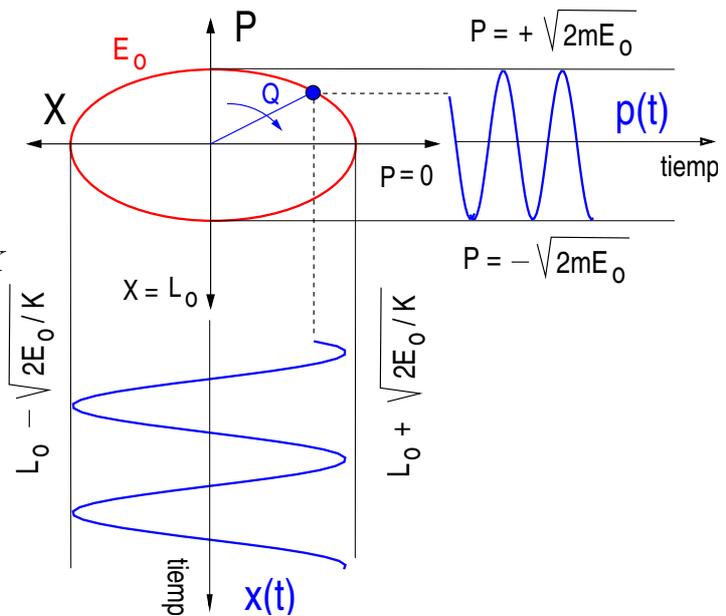


Figura 7.3: Posición $x(t)$ y cantidad de movimiento $p(t)$ para el movimiento oscilatorio a lo largo de la elipse de energía constante E_o .

Podemos concebir el movimiento del oscilador armónico como el de un punto Q que recorre dicha curva en el curso del tiempo como se indica en la Fig. 7.3. Partiendo de un punto inicial determinado por las condiciones iniciales (x_o, p_o) que fijan la energía E_o el punto Q recorre la elipse con un período constante T_o . Como muestra la Fig. 7.2 el tiempo que tarda la recta OQ en recorrer las elipses de energía constante $E_o > E_1 > E_2$ es siempre el mismo. Esto es debido a que el período del movimiento $T_o = 2\pi\sqrt{m/K}$ que no depende de la energía inicial sino del valor de la constante elástica K y la masa m .

Como se observa en la Fig. 7.3, las proyecciones de la posición de Q sobre cada eje $(x(t), p(t))$ representan las posiciones y la cantidad de movimiento en cada instante. Todos los puntos (x_o, p_o) situados sobre la elipse con E_o constante dan lugar al mismo movimiento oscilatorio pero con diferentes condiciones iniciales, es decir, con diferentes *fases* determinadas por las Ecs. 7.3.

Finalmente, podemos calcular el *promedio temporal* de la energía potencial y cinética que resultan ser iguales en un semiperíodo,

$$\frac{1}{(T_o/2)} \int_{t_o}^{t_o+(T_o/2)} \frac{m v^2}{2} dt = \frac{1}{(T_o/2)} \int_{t_o}^{t_o+(T_o/2)} U dt = \frac{m}{4} \omega_o^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{p,max}$$

²Las propiedades de la elipse pueden consultarse en la Pag. 92.

7.2. El péndulo simple

Las oscilaciones de pequeña amplitud de una masa que cuelga de un punto (péndulo simple) como el de la Fig. 7.4 son análogas al movimiento de un oscilador armónico. Podemos emplear las relaciones que encontramos para el movimiento circular (Pág. 3) puesto que la trayectoria del punto P de masa m es una circunferencia de centro O y cuyo radio es la longitud L del hilo. La posición $\mathbf{r}(t)$, velocidad $\mathbf{v}(t)$ y aceleración $\mathbf{a}(t)$ de P son,

$$\mathbf{r}(t) = L \mathbf{u}_r \quad \mathbf{v}(t) = L \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{a}(t) = L \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - L \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r$$

La tensión del hilo es $\mathbf{T} = -T(\theta) \mathbf{u}_r$ y el peso $\mathbf{P} = mg \mathbf{i}$ que expresaremos en sus componentes (ver la Fig. 7.4) a lo largo del hilo (paralela a \mathbf{u}_r) y perpendicular (paralela a \mathbf{u}_θ) mediante la transformación,

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{u}_r - \text{sen } \theta \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{j} = \text{sen } \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} m L \ddot{\theta} &= -mg \text{sen } \theta \\ m L \dot{\theta}^2 &= T(\theta) - mg \cos \theta \end{aligned} \quad (7.5)$$

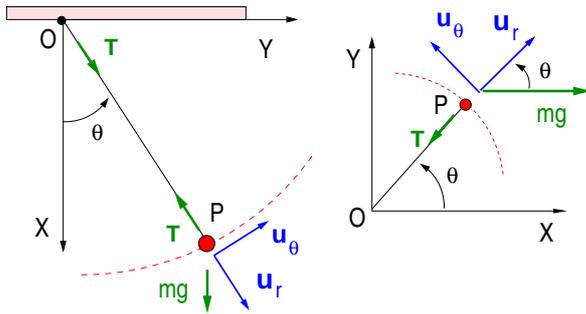


Figura 7.4: El péndulo simple con el sistema de coordenadas empleado.

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones diferenciales son la amplitud de oscilación $\theta(t)$ en radianes y $T(\theta)$ que es función implícita del tiempo y representa el valor de la tensión del hilo.

Encontrar una solución general del sistema 7.5 es difícil salvo que efectuemos la aproximación de *oscilaciones pequeñas*. Si la máxima amplitud $L \theta_m$ que alcanza P durante su movimiento es pequeña frente a la longitud del hilo $L \gg L \theta_m$ de modo que todos los ángulos $\theta(t)$ sean pequeños $\theta_m \ll 1$. Podemos entonces desarrollar en serie de potencias³

las funciones trigonométricas en 7.5,

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \simeq \theta \quad \cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Despreciando los términos del desarrollo en serie con potencias superiores a θ^3 por ser muy pequeños, el sistema de ecuaciones se simplifica,

$$\begin{aligned} m L \ddot{\theta} &= -mg \theta \\ m L \dot{\theta}^2 &= T(\theta) - mg \cos \theta \end{aligned}$$

La primera ecuación para $\ddot{\theta}(t)$ del sistema anterior es análoga a la del oscilador armónico,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

³Sobre los desarrollos de funciones en serie de potencias de una función puede consultarse la Pág. 90

con $\omega_o = \sqrt{g/L}$ con período de oscilación $T_o = 2\pi\sqrt{L/g}$. Su solución es lo mismo que antes $\theta(t) = \theta_m \text{sen}(\omega_o t + \varphi)$ donde la amplitud θ_m y la fase φ han de determinarse a partir de las condiciones iniciales del movimiento mediante las Ecs.7.3. Introduciendo la aproximación para el coseno en la segunda ecuación obtenemos para la tensión,

$$T(\theta) \simeq mL\dot{\theta}^2 + mg \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

que depende de la solución $\theta(t)$ de la primera ecuación. Para simplificar definimos la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$ y sustituimos,

$$T(\phi) = mg + mL\omega_o^2 \theta_m^2 \cos^2(\phi) - \frac{mg}{2} \theta_m^2 \text{sen}^2(\phi)$$

$$\frac{T(\phi)}{mg} = \left(1 - \frac{\theta_m^2}{2}\right) + \frac{3\theta_m^2}{2} \cos^2(\phi)$$

y finalmente,

$$\frac{T(\phi)}{mg} = \left[\left(1 + \frac{\theta_m^2}{4}\right) + \frac{3\theta_m^2}{4} \cos(2\phi) \right]$$

Hay que subrayar que la tensión es siempre positiva $T(t) > 0$ y que, puesto que el movimiento del péndulo es simétrico respecto de la vertical, su frecuencia será $2\omega_o$, el doble que la de $\theta(t)$ y su período la mitad.

Este hecho puede observarse en la Fig. 7.5 donde se han representado en función de la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$ para $\theta_m = 1$ los valores de las amplitudes $\theta(t) = \text{sen}(\phi)$ y del cociente $T(\phi)/mg$, proporcional a la tensión. Como puede observarse la tensión es siempre positiva mientras que la amplitud cambia de signo y su período de oscilación es el doble.

En la Fig. 7.5 el valor de $T(t)$ es máximo cuando el péndulo pasa por la vertical $\theta = 0$ y alcanza un valor mínimo para $\pm\theta_m$. Es decir, el mínimo valor de la tensión se alcanza dos veces en cada período de oscilación.

La tensión \mathbf{T} no hace trabajo puesto que \mathbf{T} y $d\mathbf{r}$ son perpendiculares, luego $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en la Ec. 3.12 y en consecuencia $\Delta E_c = -\Delta E_p$. Si calculamos la energía potencial respecto de la posición mas baja de P para un valor genérico del ángulo θ ,

$$E_p = mgh = mgL(1 - \cos \theta)$$

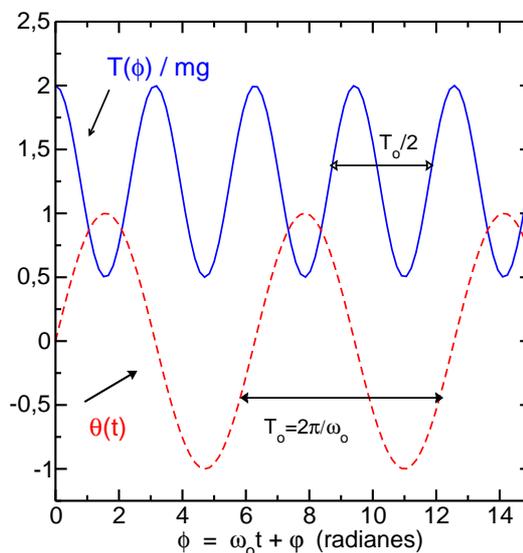


Figura 7.5: Tensión $T(\phi)$ y amplitud $\theta(\phi)$ del péndulo en función de la fase $\phi = \omega_o t + \varphi$.

y su energía total será constante y de valor,

$$E = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

Finalmente, si en esta ecuación introducimos el desarrollo en serie para el coseno despreciando las potencias iguales o superiores a θ^3 tendremos,

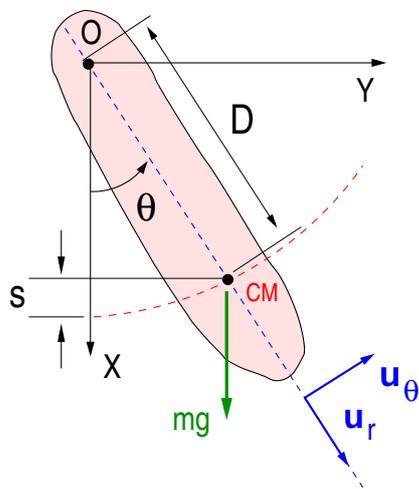
$$E \simeq \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} gL \theta^2 = \frac{m}{2} v^2 + m \frac{g}{2L} (L\theta)^2$$

luego,

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{K^2}{2} x^2$$

donde $x = L\theta$ es el espacio que recorre la partícula y $v = dx/dt = L\dot{\theta}$ su velocidad. Recuperamos la expresión (Ec. 7.4) para la energía de un oscilador armónico de masa m , constante $K = m\omega_o^2 = mg/L$ y longitud natural L_o nula.

7.3. El péndulo físico



El péndulo físico es un sólido rígido que oscila sin rozamiento bajo la acción de la gravedad alrededor de un eje fijo. Este movimiento es un ejemplo de *movimiento plano* de un sólido (ver Pág. 60) en el que el centro de masas describe una trayectoria circular alrededor del punto O como se indica en la Fig. 7.6.

Considerando el momento de inercia I_E del sólido respecto de un eje E perpendicular al plano del movimiento que pasa por el punto O , el análisis es semejante al del péndulo simple (comparese la Fig. 7.6 con la Fig 7.4). Para el momento respecto de O tendremos,

$$M_O = D \mathbf{u}_r \wedge mg \mathbf{i} = -mg D \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}$$

Figura 7.6: El péndulo físico.

y empleando la Ec. 6.28 se tiene,

$$I_E \frac{d\omega}{dt} = -mg D \operatorname{sen} \theta$$

como $\omega = d\theta/dt$ obtenemos la ecuación diferencial,

$$I_E \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg D \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (7.6)$$

siendo D la distancia del CM al punto de suspensión O . Podemos de nuevo hacer la aproximación de *oscilaciones pequeñas* $\sin \theta \simeq \theta$ de modo que recuperamos la ecuación 7.1 del oscilador armónico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgD}{I_E} \right) \theta = 0$$

con frecuencia propia $\omega_o = \sqrt{mgD/I_E}$ y cuya solución general es de nuevo de la forma $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_o t + \varphi)$.

Como se observa en la Fig. 7.6 la altura s del centro de masas correspondiente al ángulo θ respecto del punto $x = D$ es $s = D(1 - \cos \theta)$. Si calculamos la energía potencial,

$$E_p(s) = mgs = mgD(1 - \cos \theta)$$

respecto del punto de equilibrio estable $x = D$, para el movimiento entre dos instantes de tiempo t_a y t_b tendremos,

$$\Delta E_p = mg \Delta s = mgD(\cos \theta_b - \cos \theta_a)$$

donde θ_a y θ_b son los ángulos inicial y final del movimiento. La variación de la energía cinética $\Delta E = -\Delta E_p$ se encuentra empleando la Ec. 6.16 para el centro de masas,

$$\frac{m}{2}(V_b^2 - V_a^2) + \frac{I_{CM}}{2}(\omega_b^2 - \omega_a^2) = -mg \Delta s$$

y la energía del péndulo para un ángulo genérico será,

$$E(\theta) = \frac{mV_{CM}^2}{2} + \frac{I_{CM}}{2}\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta)$$

que es una cantidad conservada por no existir rozamiento. Si como se indica en la Fig. 7.6 D es la distancia del punto O al CM su velocidad será $\mathbf{V}_{CM} = (\omega D) \mathbf{u}_\theta$ y tendremos,

$$E(\theta) = \frac{1}{2}(I_{CM} + mD^2)\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta) = \frac{I_E}{2}\omega^2 + mgD(1 - \cos \theta) \quad (7.7)$$

donde la cantidad entre paréntesis resulta ser el momento de inercia $I_E = I_{CM} + mD^2$ respecto del eje E que pasa por O . Recuperamos la expresión para $E(\theta)$ que encontraríamos empleando la Ec. 6.17, es decir, tomando $O \equiv Q$ un punto fijo del movimiento.

Si derivamos respecto del tiempo la ecuación para $E(\theta)$ recuperamos asimismo la ecuación 7.6 anterior para el movimiento del péndulo compuesto. También podemos calcular la variación de la de la energía cinética ΔE_c mediante la Ec. 6.22,

$$\Delta E_c = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \int_{\theta_a}^{\theta_b} (-mgD \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} dt = mgD(\cos \theta_b - \cos \theta_a) = -mg \Delta s$$

que es justamente igual al valor de $-\Delta E_p$ que hemos encontrado antes.

7.4. El oscilador armónico amortiguado

Como hemos visto, (Pag. 67) la energía inicial del oscilador E_o es fijada por las condiciones iniciales (x_o, p_o) que –si no existe rozamiento– determina la elipse de energía constante $E(t) = E_o$ en el plano (x, p) como en la Fig. 7.2.

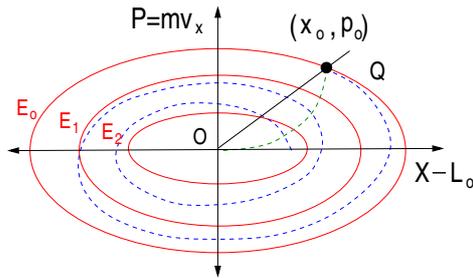


Figura 7.7: Dos posibles movimientos (líneas discontinuas) del oscilador armónico con rozamiento.

y su trayectoria en el plano (x, p) debe terminar en $x = L_o$ donde $p = 0$ que corresponde a los puntos de reposo.

En la Fig. 7.7 se muestran dos posibles casos partiendo de la elipse correspondiente a la energía inicial E_o . Si la pérdida de energía por rozamiento es rápida el bloque puede detenerse sin oscilar (curva de trazo continuo). En cambio, si la magnitud de la fuerza de rozamiento es comparable a la que ejerce el muelle puede trazar curvas alrededor del eje x ($p = 0$) (curva de trazo discontinuo) que corresponden a oscilaciones de amplitud decreciente. En todos los casos las amplitudes y velocidades máximas que alcanza en cada período la masa m disminuyen a medida que se acerca a un estado de equilibrio donde $p = 0$.

Si la fuerza de fricción es $\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$ (Ec. 3.7) la ecuación de movimiento resulta ser,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + K(x - L_o) = 0$$

donde con el cambio de variable, $x = s - L_o$ obtenemos la ecuación del *oscilador armónico amortiguado*,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0$$

Dependiendo del valor de $\omega_o = \sqrt{K/m}$ y del *coeficiente de amortiguamiento* $\beta = \gamma/2m$ nos encontramos con tres posibilidades que se encuentran representadas en función del tiempo en la Fig. 7.8.

Si $\omega_o^2 < \beta^2$ se dice que es un oscilador *sobreamortiguado*, el rozamiento domina y no hay oscilaciones (caso de la curva a trazos mas corta en la Fig. 7.7). El *amortiguamiento crítico* tiene lugar cuando $\omega_o^2 = \beta^2$ y puede probarse que la solución en este caso es de la forma,

$$s(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$$

en donde de nuevo las constantes se fijan mediante las condiciones iniciales.

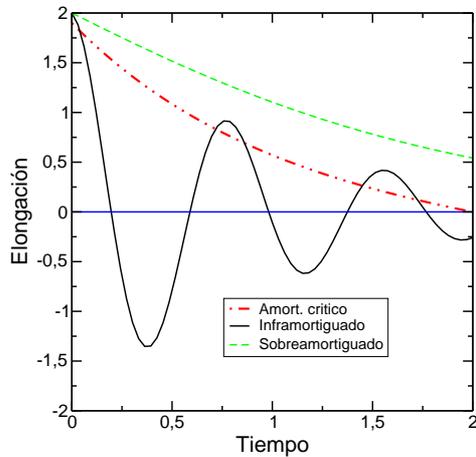


Figura 7.8: Ejemplos de movimientos del oscilador armónico amortiguado con $\dot{s}(0) = 0$.

En cambio para $\omega_o^2 > \beta^2$ el oscilador está *inframortiguado* y existen oscilaciones de amplitud decreciente en el tiempo (el caso de la curva a trazos más larga en la Fig. 7.7). La solución es,⁴

$$s(t) = A_o e^{-\beta t} \text{sen}(\Omega t + \varphi) \quad (7.8)$$

La frecuencia $\Omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2$ es menor que la frecuencia propia del oscilador ω_o y depende de γ , es decir, de la magnitud de la fuerza de fricción.

En este caso la fuerza de rozamiento compite con la que ejerce el muelle y la amplitud de la oscilación $A(t)$ decrece exponencialmente con el tiempo como se observa en la Fig. 7.8 (análoga a la curva a trazos de la Fig. 7.7). De nuevo, la amplitud A_o y la fase φ se determinan mediante las condiciones iniciales.

7.5. El oscilador armónico forzado

Si sobre la masa m del oscilador armónico amortiguado actúa además una fuerza periódica externa $F(t) = F_o \cos(\omega_f t)$ de frecuencia ω_f y amplitud F_o se dice que es un oscilador *forzado* y su ecuación del movimiento, con el cambio $s = x - L_o$ es,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{F_o}{m} \cos(\omega_f t). \quad (7.9)$$

Podemos comprobar que una función de la forma $s(t) = A \text{sen}(\omega_f t + \varphi)$ es una solución particular,⁵ de la ecuación para una cierta amplitud $A(\omega_f)$ y fase $\varphi(\omega_f)$ que son funciones de la frecuencia de la *forzante* $F(t)$. Dicha solución es válida para tiempos $t \gg \tau$ superiores al tiempo característico de un cierto transitorio $\tau \simeq 1/\beta$, si sustituimos $s(t)$ en 7.9 tendremos,

$$A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \text{sen}(\omega_f t + \varphi) + 2\beta\omega_f \cos(\omega_f t + \varphi) = \frac{F_o}{m} \cos(\omega_f t)$$

luego, desarrollando las funciones trigonométricas e igualando los coeficientes en $\text{sen}(\omega_f t)$ y $\cos(\omega_f t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \cos(\varphi) - 2A\beta\omega_f \text{sen}(\varphi) &= 0 \\ A(\omega_o^2 - \omega_f^2) \text{sen}(\varphi) + 2A\beta\omega_f \cos(\varphi) &= F_o/m \end{aligned}$$

y estas dos ecuaciones pueden simplificarse aún,

⁴Puede comprobarse substituyendo en la ecuación diferencial y verificando que se anulan los coeficientes en $\text{sen}(\Omega t + \varphi)$ y $\cos(\Omega t + \varphi)$

⁵La solución general se estudiará en el próximo curso.

$$\begin{aligned} m A (\omega_o^2 - \omega_f^2) &= F_o \text{sen}(\varphi) \\ 2 m A \beta \omega_f &= F_o \text{cos}(\varphi) \end{aligned}$$

Si dividimos la primera por la segunda obtenemos una relación para la fase $\varphi(\omega_f)$,

$$\tan(\varphi) = \frac{(\omega_o^2 - \omega_f^2)}{2\beta\omega_f} \quad (7.10)$$

y otra para la amplitud $A(\omega_f)$,

$$A(\omega_f) = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}} \quad (7.11)$$

Para poder representar gráficamente estas funciones introducimos el cambio de variable $z = \omega_f/\omega_o$ y $q = \beta/\omega_o$ de modo que la Ec. 7.10 se convierte en,

$$\tan(\varphi) = \left(\frac{1}{2q}\right) \frac{1-z^2}{z} \quad (7.12)$$

y la amplitud $A(\omega_f) = A(z)$ en la Ec. 7.11 es proporcional a $h(z) = m\omega_o^2 A(z)/F_o$ luego,

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4q^2 z^2}} \quad (7.13)$$

En la Fig. 7.9 se ha representado $h(z)$ como función del cociente $z = \omega_f/\omega_o$ para diferentes valores de $q = \beta/\omega_o$ que representa la razón entre el rozamiento ($\beta = \gamma/2m$) y la frecuencia propia del oscilador ($\omega_o = \sqrt{K/m}$). Podemos observar el crecimiento que experimenta la amplitud $A(\omega_f)$ cuando ω_f tiende a ω_o (es decir, entorno a $z = 1$) dicho crecimiento que se hace mayor a medida que $\omega_o > \beta$ (o equivalentemente, $1 \gg q$).

A este crecimiento de la amplitud para frecuencias ω_f de $F(t)$ próximas a la frecuencia propia del oscilador ω_o se le denomina *resonancia* y en el límite en el que el rozamiento es nulo ($\beta = 0$ o equivalentemente $q = 0$ en la Ec. 7.11) aparece un crecimiento indefinido de la amplitud.

En la resonancia la amplitud del movimiento crece porque la transferencia de energía de la fuerza aplicada a la partícula es óptima ⁶. En casi todos los sistemas físicos reales existe un mínimo rozamiento (en la práctica siempre $\beta \neq 0$ aunque tome un valor muy pequeño) que hace que el crecimiento de la amplitud del movimiento tenga un límite superior como se muestra en la Fig. 7.9.

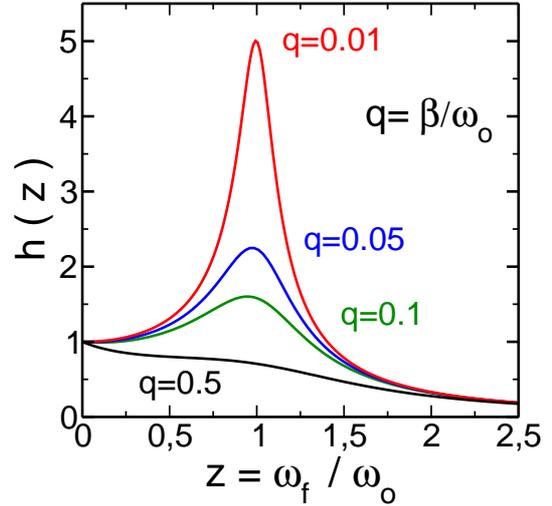


Figura 7.9: Crecimiento de la amplitud $A(\omega_f)$ para valores de $\omega_f \approx \omega_o$.

⁶Par una mayor información puede consultarse la sección 12.13, pags. 389-393 del Vol I de la Ref. [1]

8.1. Los estados de agregación de la materia

La materia se presenta en la naturaleza en tres estados principales de agregación llamadas también *fases* de la materia. Denominamos *sólidos* aquellos materiales que presentan una forma y volumen propio en los que resultan dominantes las intensas fuerzas interatómicas existentes entre sus partículas que se encuentran empaquetadas formando estructuras ordenadas. Su forma macroscópica sólo se altera cuando se le aplican fuerzas exteriores que lo deforman y si los cambios son pequeños comparados con su tamaño característico, podemos considerarlo como un sólido rígido ideal.

En los *gases* las fuerzas entre sus moléculas son mucho más débiles. La energía cinética promedio de sus partículas les permite superar las energías de cohesión intermoleculares por lo que sus partículas ocupan todo el volumen que se les ofrece. Los *líquidos* constituyen un caso intermedio en los que, aunque las fuerzas intermoleculares son importantes, no pueden formar estructuras ordenadas como en un sólido. En los líquidos ordinarios (agua, aceites, ...) las fuerzas a nivel molecular mantienen las distancias entre sus átomos o moléculas prácticamente constantes a nivel microscópico aunque permiten su movimiento relativo. En consecuencia, un *líquido simple* cambia de forma significativamente cuando se le aplican fuerzas, aunque éstas sean de pequeña magnitud. Esta propiedad de conservar las distancias intermoleculares permitiendo en cambio los movimientos relativos de las moléculas confieren a los líquidos la propiedad de adoptar la forma del recipiente que les contiene.

La energía cinética media de las moléculas de una sustancia está determinada por su temperatura y de acuerdo con el valor de esta última muchas sustancias pueden encontrarse en uno u otro estado dependiendo de su valor. Sustancias como el agua pueden encontrarse en uno de los tres estados de agregación, sólido (hielo), líquido o gas (vapor de agua) que tienen densidades muy diferentes. Se dice que el material experimenta una *transición de fase* cuando pasa de uno a otro estado de agregación.

Las fronteras entre cada uno de los tres estados de agregación (o *fases*) mencionados son difíciles de precisar. Además, existen en la naturaleza materiales (por ejemplo, una gelatina o un plástico) cuyo comportamiento resulta ser intermedio entre un fluido y un sólido elástico.

La diferencia principal entre los líquidos y los gases es la *compresibilidad* que es su capacidad para cambiar su volumen cuando son sometidos a fuerzas externas. La variación ΔV del volumen de un gas ideal cuando su presión se incrementa Δp manteniendo la temperatura del mismo T constante es,

$$\Delta(pV) = NK_B \Delta T = 0 \quad \frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{V}{p}$$

y por unidad de volumen tendremos,

$$\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{1}{p} < 0$$

Evidentemente al aumentar la presión disminuye el volumen. Por el contrario, en el caso de los líquidos la experiencia directa nos indica que $\Delta V/\Delta p \simeq 0$, es decir no varía apenas su volumen con la presión por lo que decimos que son *incompresibles*.

Cuando un líquido es sometido a fuerzas externas cambia de forma pero su volumen (o equivalentemente su densidad ρ_0) permanece constante, a diferencia de los gases que pueden sufrir una disminución de su volumen siendo su densidad una función $\rho(\mathbf{r}, t)$ que dependerá de la posición \mathbf{r} y que también puede cambiar a lo largo del tiempo.

8.2. Elasticidad lineal

Cuando son sometidos a fuerzas externas los materiales en fase sólida se resisten a las *deformaciones*, es decir, tanto a los cambios de volumen como de forma. La deformación que experimenta un sólido sometido a un conjunto de fuerzas externas depende no sólo de la disposición de dichas fuerzas sino también de la existencia de direcciones privilegiadas en su interior a nivel microscópico en forma de fibras, estructuras a nivel molecular, ...etc. En este curso nos limitaremos a sólidos *isótropos*, que son aquellos materiales (generalmente sólidos policristalinos) que transmiten las fuerzas aplicadas por igual en todas direcciones.

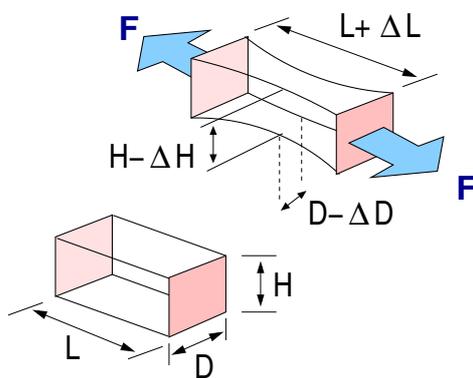


Figura 8.1: Deformación bajo tracción. pequeña,

La *elasticidad lineal*¹ es una aproximación que corresponde al límite donde las deformaciones que experimentan los materiales son pequeñas comparadas con sus dimensiones de modo que sus cambios de forma son reversibles.

Se muestra en la Fig. 8.1 el alargamiento ΔL que experimenta una barra de material sometida a las fuerzas F y la correspondiente contracción ΔH y ΔD a lo largo de otras dos direcciones. Las fuerzas aplicadas al sólido F por unidad de superficie del mismo $S = D \times H$ se denominan *esfuerzos* o *tensiones elásticas* y tienen unidades de presión. En la elasticidad lineal la deformación unitaria $\Delta L/L$ que experimenta el material es

¹Un tratamiento mas amplio de este apartado puede encontrarse en el capítulo 13, pags. 315-330 de la referencia [6].

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F/S}{E} \ll 1$$

y proporcional a la tensión F/S . El coeficiente E es una propiedad característica del material y se denomina *módulo de elasticidad* o de *Young*. Para conservar su volumen, el material ha de contraerse a lo largo de las otras dos direcciones perpendiculares de modo que,

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta H}{H} = -\sigma \frac{\Delta L}{L} < 0$$

y por tratarse de un sólido *isótropo* ΔH y ΔD han de ser iguales. El coeficiente σ es también una propiedad característica del material y se denomina *módulo de Poisson*.

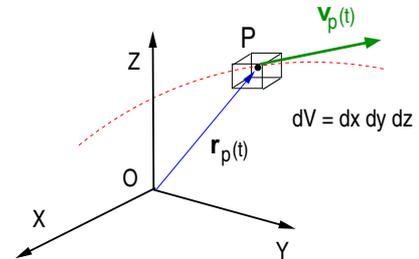


Figura 8.2: Movimiento del elemento de volumen ΔV .

8.3. Descripción de un medio continuo

En el presente curso consideraremos solamente *fluidos ideales* que engloban tanto a los *líquidos ideales* como a los *gases*. Desde el punto de vista mecánico ambos pueden definirse como un medio material *continuo*, *deformable* y que puede *fluir*.

La descripción de un material como un medio continuo es análoga a la empleada anteriormente para el cálculo de centros de masa (Pag. 44) y momentos de inercia (Pag. 48) de sólidos rígidos macroscópicos.

Consideraremos el medio descompuesto en un número muy grande de pequeños elementos de volumen ΔV alrededor del punto característico P situado en su centro de masas como se muestra en la Fig. 8.2.

El medio deformable puede considerarse como *continuo* cuando el número de partículas N contenidas dentro del volumen ΔV es tan grande que cualquier fluctuación en el número de estas ΔN puede considerarse despreciable.

Por ejemplo, a presión y temperatura ambiente en un cubo de aire de $1\mu m = 10^{-4}cm$ de lado contiene 3×10^7 moléculas, por lo que un pequeño cambio en su número no es relevante para analizar el movimiento de dicho elemento de volumen.

Como muestra la Fig. 8.2, consideraremos que cada elemento de volumen ΔV (o equivalentemente, su punto característico P) se mueve describiendo una curva en el espacio. En cada punto \mathbf{r} en el instante t la velocidad del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ será un vector tangente a dicha curva que se denomina *línea de corriente*. Describimos el movimiento asignando a cada volumen

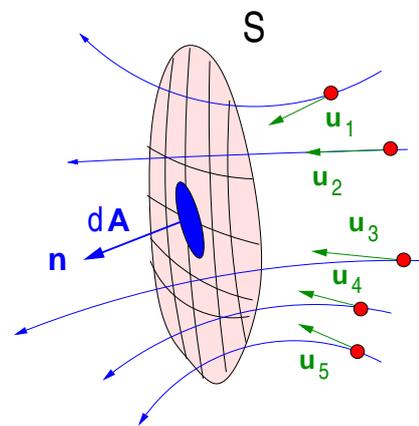
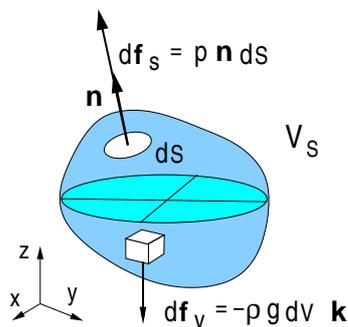


Figura 8.3: Líneas de corriente de un fluido que atraviesa la superficie S en el sentido de las flechas.

ΔV un único vector velocidad $\mathbf{v}_p(t)$ y aceleración $\mathbf{a}_p(t)$, o equivalentemente, introduciendo un campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ y de aceleraciones $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$.

8.4. Fuerzas en un fluido

Podemos distinguir dos clases de fuerzas que actúan sobre cada pequeño elemento de fluido de volumen ΔV . En primer lugar fuerzas de largo alcance, como la gravedad, que penetran en el interior del mismo y son proporcionales a la cantidad de materia.



Por ejemplo, la masa contenida en el elemento de volumen de la Fig. 8.4 será $dm = \rho(\mathbf{r}, t) dV$ y por lo tanto la fuerza con que le atrae el campo gravitatorio terrestre

$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \rho(\mathbf{r}, t) dV = -(g \rho(\mathbf{r}, t) dV) \mathbf{k}$$

de modo que $d\mathbf{F}_g/dV = \mathbf{g} \rho(\mathbf{r}, t)$ es la fuerza por unidad de volumen y la aceleración de la gravedad $d\mathbf{F}_g/dm = -\mathbf{g}$ la fuerza por unidad de masa.

En general tendremos,

Figura 8.4: Fuerzas en un fluido.

$$d\mathbf{F}_V = \mathbf{f}_v dm = \mathbf{f}_v \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

A este tipo de fuerzas de largo alcance $d\mathbf{F}_V$ proporcionales al volumen dV de materia se las denomina *fuerzas volumétricas*. La fuerza total que actúa sobre un fluido encerrado en un volumen V_S será,

$$\mathbf{F}_V = \int_{V_S} \mathbf{f}_v dm = \int_{V_S} \mathbf{f}_v \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (8.1)$$

El segundo tipo de fuerzas tienen origen molecular por lo que son de corto alcance y disminuyen muy rápidamente con la distancia entre los elementos que interactúan. Sólo son apreciables cuando su separación es del orden de la distancia entre las moléculas del fluido y por lo tanto, desde el punto de vista macroscópico, son *fuerzas de contacto*. Aparecen cuando existe una superficie de contacto físico entre los cuerpos que interactúan y actúan (como por ejemplo la presión) a través de dicha superficie de interacción.

La magnitud de estas *fuerzas superficiales* es proporcional al área dS de contacto,

$$d\mathbf{F}_S = \mathbf{f}_s(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) dS$$

y el vector $d\mathbf{F}_s/dS = \mathbf{f}_s(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$ tiene unidades de fuerza por unidad de superficie. En el caso general puede variar en cada punto \mathbf{r} del fluido, con el tiempo y dependen de la orientación \mathbf{n} de la superficie de contacto. Evidentemente, $\mathbf{f}_s(-\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) = -\mathbf{f}_s(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$ y la fuerza \mathbf{F}_S sobre una superficie S cualquiera será,

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{f}_s dS$$

En el ejemplo de la la figura 8.4 se muestra la fuerza $d\mathbf{F}_s = p(\mathbf{r}) \mathbf{n} dS = p(\mathbf{r}) d\mathbf{S}$ que *ejerce el fluido sobre las paredes* que encierran el volumen V_s . Es proporcional a la superficie dS , paralela al vector normal \mathbf{n} y a la presión $p(\mathbf{r})$ en dicho punto. La fuerza total *ejercida por las paredes del recinto sobre el fluido* será entonces,

$$\mathbf{F}_S = - \int_S d\mathbf{F}_s = - \int_S p(\mathbf{r}) \mathbf{n} ds \quad (8.2)$$

Existen distintos tipos de fuerzas superficiales, una fuerza superficial muy importante en un líquido es la *viscosidad*. Imaginemos como muestra la Fig. 8.5 que el fluido se mueve en capas paralelas al eje X y que la velocidad de cada una de ellas es $u_x(z)$, de modo que la capa por encima de la recta SS' se mueve más lentamente que la que se encuentra debajo de ésta. Las interacciones moleculares hacen que la capa más rápida *friccione* con la más lenta y para acelerarla pierde cantidad de movimiento. Es decir, experimenta una fuerza superficial contraria al sentido de su movimiento,

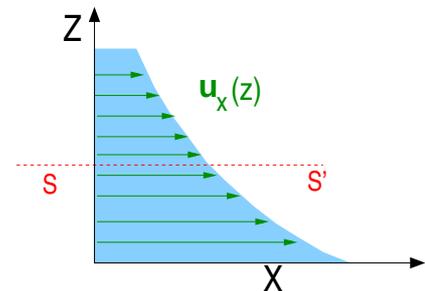


Figura 8.5: Perfil de velocidades $u_x(z)$.

$$df_\nu = -\mu \frac{du_x}{dz} dS$$

donde μ es el *coeficiente de viscosidad* y es una propiedad característica del líquido (o gas). La fuerza viscosa podemos expresarla como una tensión

$$\frac{df_\nu}{dS} = -\mu \frac{du_x}{dz}$$

es decir, como una fuerza por unidad de área. Las unidades de la viscosidad en el sistema CGS son *dinas \times s/cm²* y se denomina *Poise* mientras que en el sistema internacional no tienen un nombre especial. En muchas ocasiones se emplea la *viscosidad cinemática* $\nu = \mu/\rho$ donde ρ es la densidad del líquido.²

8.5. Equilibrio de fluidos

Dentro un recipiente que contiene un fluido en reposo podemos dibujar mentalmente un pequeño volumen δV como el de la Fig. 8.6 con lados de igual longitud δl al lo largo de los ejes. Son entonces iguales las áreas $\delta A = \delta l^2/2$ de las caras que se apoyan en los planos (X, Y) , (X, Z) e (Y, Z) .

La presión del líquido ejerce una fuerza perpendicular $\delta\mathbf{F}_y = (p_{xz} \delta A) \mathbf{j}$ sobre la cara ABO que se apoya en el plano (X, Z) y también $\delta\mathbf{F}_x = (p_{yz} \delta A) \mathbf{i}$ y $\delta\mathbf{F}_z = (p_{xy} \delta A) \mathbf{k}$ sobre las caras OBC y OAC respectivamente.

²Pueden consultarse la sección 24.5, pags. 984-986 de la Ref. [1] y la sec. 117, pags. 365-370 de la Ref. [6].

El área del triángulo ABC será,

$$\delta A_n = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \sqrt{3} \frac{\delta l^2}{2}$$

y la fuerza que ejerce la presión estará dirigida a lo largo de la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ resultando,

$$\delta \mathbf{F}_n = -(p_n \delta A_n) \mathbf{n} = -p_n \sqrt{3} \frac{\delta l^2}{2} \mathbf{n}$$

donde p_n es la presión sobre la cara ABC .

Puesto que el líquido está en reposo, en el centro de masas del volumen δV tiene que tenerse,

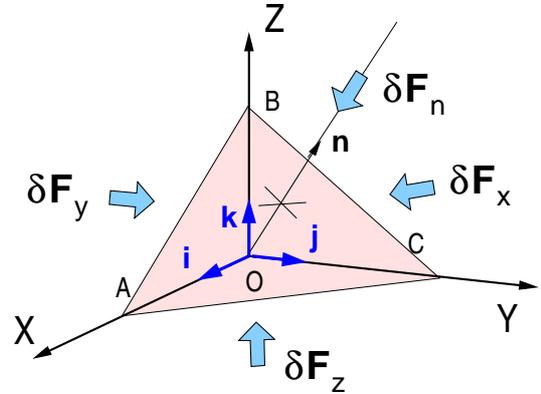


Figura 8.6: Fuerzas sobre el volumen con lados con longitud δl .

$$\delta \mathbf{F}_n + \delta \mathbf{F}_x + \delta \mathbf{F}_y + \delta \mathbf{F}_z = 0$$

de modo que,

$$-p_n \sqrt{3} \frac{\delta l^2}{2} \mathbf{n} = -\frac{\delta l^2}{2} (p_{yz} \mathbf{i} + p_{xz} \mathbf{j} + p_{xy} \mathbf{k})$$

para que esta ecuación vectorial se cumpla debe suceder que,

$$p_n = p_{yz} = p_{xz} = p_{xy}$$

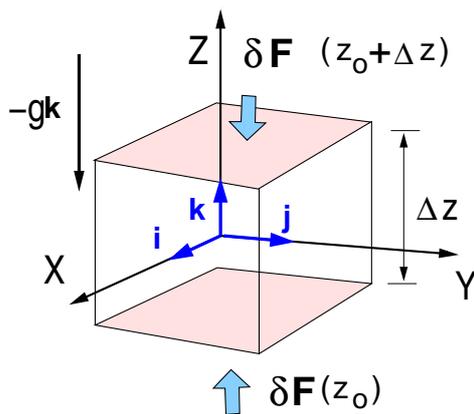


Figura 8.7: Fuerzas sobre el cubo de sección A y altura δz .

tiene un peso $\delta \mathbf{F}_m = -\Delta M g \mathbf{k}$. Puesto que el líquido está en reposo, en el centro de masas del volumen ΔV ha de existir un equilibrio de fuerzas,

Es decir, que cuando el fluido se encuentra en reposo el valor de la presión es independiente de la orientación de la superficie δA sobre la que actúa.

De nuevo, consideremos mentalmente el cubo de sección A constante y altura Δz la Fig. 8.7 inmerso dentro de un líquido en reposo sobre el que la gravedad $-g \mathbf{k}$ es única fuerza por unidad de masa que actúa. A lo largo de las direcciones X e Y las fuerzas $\delta \mathbf{F}_x = \delta \mathbf{F}_y = 0$ son nulas para que el volumen $\Delta V = A \delta Z$ permanezca en reposo.

Sobre la cara inferior del cubo situada en la coordenada $z = z_0$ actúa una la fuerza $\delta \mathbf{F}(z_0) = p(z_0) A \mathbf{k}$ y sobre la cara superior en $z = z_0 + \Delta z$ la fuerza será $\delta \mathbf{F}(z_0 + \delta z) = -(p(z_0) + \Delta p) A \mathbf{k}$ La masa $\Delta M = \rho \Delta V$ de líquido de densidad ρ contenido dentro del volumen

$$\delta \mathbf{F}(z_o + \delta z) + \delta \mathbf{F}(z_o) + \delta \mathbf{F}_m = 0, \quad -\Delta p A \mathbf{k} - \rho g A \Delta z \mathbf{k} = 0$$

de donde,

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g \quad \text{luego,} \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Es decir, en el equilibrio el incremento de presión Δp entre z_o y $z_o + \Delta z$ es debido al peso de la masa ΔM de la columna de líquido. La presión $p(z)$ decrece a medida que la altura Z aumenta ya que su derivada $dp/dz < 0$ es negativa al ser ρ y g siempre positivos.

Podemos deducir esta ecuación de otro modo equivalente, para el fluido en reposo dentro de un recipiente ha de ser nula la suma de las fuerzas volumétricas (Ec. 8.1) y superficiales (Ec. 8.2) aplicadas *sobre* el mismo,

$$\int_V \mathbf{f} \rho(\mathbf{r}, t) dV - \int_S p(\mathbf{r}) d\mathbf{s} = 0$$

Podemos transformar la integral de superficie S en otra sobre el volumen V_S empleando la Ec. 9.17³

$$\int_S p(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int_{V_S} \nabla p(\mathbf{r}) dV \quad \text{luego,} \quad \int_{V_S} (\mathbf{f} \rho(\mathbf{r}, t) - \nabla p) dV = 0$$

Puesto que el volumen V_S que hemos considerado es arbitrario para que esta última integral sea siempre nula lo será el integrando. Llegamos entonces a la ecuación,

$$\mathbf{f} \rho(\mathbf{r}, t) = \nabla p \tag{8.3}$$

que ha de satisfacerse para que todos los puntos del fluido se encuentren en equilibrio.

Si la única fuerza volumétrica es la gravedad terrestre $\mathbf{f} = -g \mathbf{k}$ resulta para la coordenada Z ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho(\mathbf{r}, t) \tag{8.4}$$

y a lo largo de las otras dos direcciones,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Es decir, en el equilibrio la presión no varía a lo largo de las direcciones X e Y , siendo una función $p(z)$ decreciente puesto que su derivada parcial es negativa.

La Ec. 8.4 (o equivalentemente la Ec. 8.3) es válida para sistemas de un cierto tamaño donde la fuerza dominante sea la presión $p(z)$ y puedan despreciarse otras fuerzas superficiales que no hemos considerado, como por ejemplo la tensión superficial.

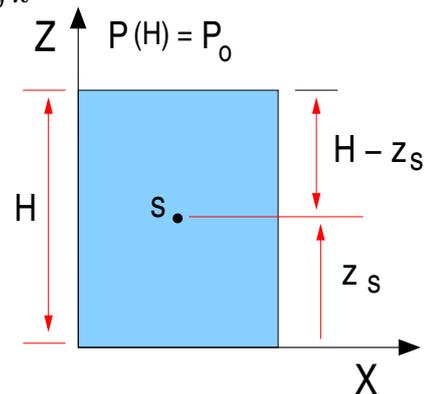


Figura 8.8: Presión hidrostática en el punto S situado a la profundidad $H - z_s$.

³Esta transformación está explicada en la Pag. 101 de los *Complementos*.

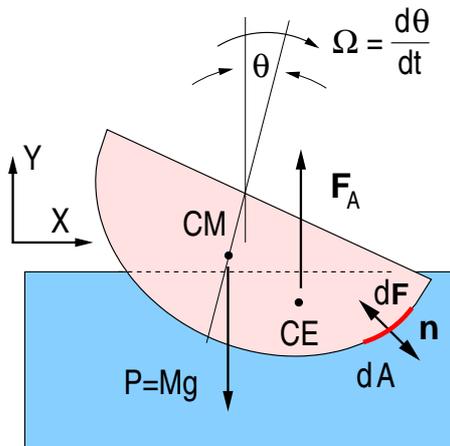
Para obtener la dependencia de la presión $p(z)$ de un fluido en reposo con la altura z tendremos que resolver la ecuación diferencial 8.4, donde hemos de especificar la densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$. En el caso de un gas, la función $\rho(\mathbf{r}, t)$ se obtiene a partir de su *ecuación de estado*, por ejemplo considerando que el gas es ideal. En cambio, para un líquido la densidad es uniforme $\rho(\mathbf{r}, t) \simeq \rho_o$ y la Ec. 8.4 se puede integrar con sencillez. Siguiendo el esquema de la Fig. 8.8 para un punto S sumergido en un líquido a una profundidad $H - z_s$,

$$p(z) = p_o + \rho_o g (H - z) \tag{8.5}$$

en donde $p(H) = p_o$ es la presión del gas que existe sobre la superficie libre del líquido en $z = H$, que sobre la superficie terrestre será la presión atmosférica.

8.5.1. Fuerzas sobre cuerpos sumergidos

En la Ec. 8.5 la presión que experimenta el punto S depende exclusivamente de la profundidad $H - z_s$ a la que se encuentra dentro del líquido. Podemos entonces hacer uso de la Ec. 8.2 para calcular la fuerza \mathbf{F}_S que ejerce *el líquido sobre un cuerpo* sumergido total o parcialmente.



Como se observa en la Fig. 8.9 sobre cada elemento de superficie sumergida dA el líquido ejerce una fuerza por unidad de área $d\mathbf{F}_A = -p(z) d\mathbf{A}$ perpendicular a $d\mathbf{A}$ y un momento respecto de un punto O , $d\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \wedge d\mathbf{F}_A$ de modo que,

$$\mathbf{F}_A = - \int_A p(z) \mathbf{n} dA \quad \mathbf{M}_o = \int_A \mathbf{r} \wedge d\mathbf{F}_A \tag{8.6}$$

en donde A es la superficie sumergida del cuerpo que ocupa el volumen V_A . Tomando $\mathbf{f} = -g\mathbf{k}$ el peso del fluido encerrado por A viene dado por la Ec. 8.1,

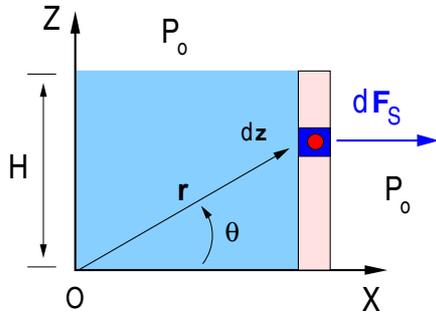
Figura 8.9: Oscilaciones de un cuerpo parcialmente sumergido cuyo CM no coincide con el centro de empuje CE.

$$\mathbf{F}_V = (-\mathbf{k})(g\rho_o) \int_{V_A} dV = -g\rho_o V_A \mathbf{k}$$

Para que exista equilibrio ambas fuerzas han de ser iguales y tener sentidos opuestos $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_V$, es decir la *fuerza de flotación* \mathbf{F}_A sobre la superficie A , ha de ser igual y contraria al peso del fluido $\mathbf{P} = -M_A g \mathbf{k}$ contenido dentro. Cuando un cuerpo sumergido tiene una densidad $\rho < \rho_o$ su peso es entonces menor que la masa de agua que desaloja por lo que la fuerza $\mathbf{F}_A - \mathbf{P}$ le empuja hacia la superficie. En caso contrario $\rho > \rho_o$ dominará el peso y el cuerpo se sumerge (principio de Arquímedes). En los cuerpos *homogéneos* la fuerza \mathbf{F}_A se aplica en el centro de masas del volumen sumergido (denominado *centro de empuje* (CE) o de *carena*).

Ejemplo: En la Fig. 8.10 una columna de líquido de altura H se encuentra retenida por una compuerta de lado L sobre la que el fluido ejerce una fuerza \mathbf{F}_A y momento \mathbf{M}_o dados por las

Ecs. 8.6. La superficie de la compuerta sobre la que actúa el líquido será $A = LH$, por lo que tendremos, $d\mathbf{A} = L dz \mathbf{i}$, $\mathbf{F}_A = F_A \mathbf{i}$, y la contribución de la presión atmosférica P_o que actúa a ambos lados se cancela.



$$F_A = g \rho_o \int_0^H (H - z) L dz = g \rho_o L \frac{H^2}{2}$$

representa la fuerza neta que se ejerce sobre la compuerta. Para el momento respecto de O se tiene,

$$dM_o = \mathbf{r} \wedge d\mathbf{F}_A = -r \text{ sen } \theta dF_A \mathbf{j} = -z dF_A \mathbf{j}$$

Figura 8.10: Compuerta que retiene y por lo tanto, una columna de líquido.

$$M_o = g \rho_o L \int_0^H z (H - z) dz = g \rho_o L \frac{H^3}{3}$$

Para que la compuerta se encuentre en equilibrio hemos de aplicar una fuerza de magnitud F_A en el sentido $-\mathbf{i}$ y a la altura Z_c de modo que su momento sea igual y contrario a M_o ,

$$Z_c F_c = M_o = g \rho_o L \frac{H^3}{3} \quad \text{luego,} \quad Z_c = \frac{2}{3} H$$

8.6. Transporte de masa

Estudiaremos a continuación situaciones más generales que la estática de fluidos donde la presión solamente puede variar con la profundidad como indica la expresión 8.5. Consideraremos el *transporte de materia* de un fluido *perfecto* o *ideal* sobre el que actúan exclusivamente la presión y la fuerza de la gravedad, siendo despreciables otras fuerzas como la viscosidad, tensión superficial, ...etc.

En el movimiento *estacionario* la velocidad del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ y su densidad $\rho(\mathbf{r})$ a lo largo de una línea de corriente son función de la posición \mathbf{r} y no cambian en el tiempo. En la Fig. 8.11 se muestran dos superficies pequeñas perpendiculares a las líneas de corriente, de modo que toda partícula que cruza dS_1 atraviesa después dS_2 . La masa Δm_1 que atraviesa dS_1 en el tiempo Δt será $\Delta m_1 = \rho(\mathbf{r}_1) dS_1 u_1 \Delta t$ y análogamente $\Delta m_2 = \rho(\mathbf{r}_2) dS_2 u_2 \Delta t$ para dS_2 .

Puesto que no se crean ni destruyen partículas durante el movimiento la cantidad de masa $\Delta m_1/\Delta t$ que entra en la unidad de tiempo en la superficie S_1 es la misma $\Delta m_2/\Delta t$ que sale por S_2 , luego

$$\rho(\mathbf{r}_1) dS_1 u_1 = \rho(\mathbf{r}_2) dS_2 u_2$$

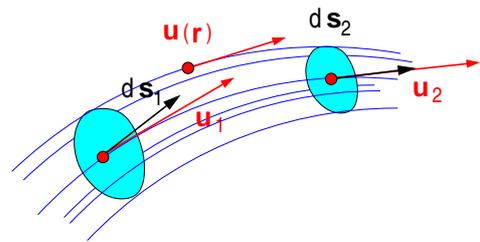


Figura 8.11: Movimiento estacionario de un fluido.

Esta es una expresión de la *ecuación de continuidad de los fluidos*⁴, además en el caso de un líquido $\rho_1 = \rho_2 = \rho_o$ es constante $u_1 dS_1 = u_2 dS_2$.

La experiencia nos muestra que cuando existe una diferencia de presión en un líquido entre dos puntos los fluidos se mueven hacia el lugar donde la presión es menor. Consideremos un pequeño volumen (ver Fig. 8.12) de fluido $\Delta V = A \Delta z$ de sección $A = \Delta x \Delta y$ y masa $\Delta m = \rho(\mathbf{r}) \Delta V$ que se mueve sobre una línea de corriente que hacemos coincidir con el eje Z . La velocidad de su centro de masas \mathbf{v}_{CM} coincide con la del fluido \mathbf{u}_z en dicho punto que se encuentra aproximadamente en el centro del volumen ΔV .

Como se observa en la Fig. 8.12 las presiones a ambos lados de ΔV serán $p_a = p(z_o)$ y $p_b = p(z_o) + \Delta p$ de modo que la fuerza sobre el CM será,

$$\Delta F_z = F_a - F_b = (p_a A) - (p_b A) = -\Delta P A$$

donde $\Delta p = p_b - p_a$ es la diferencia de presión entre ambas caras del cubo a lo largo del eje Z . Si dividimos por Δz la ecuación,

$$\frac{\Delta F_z}{\Delta z} = -\frac{\Delta p}{\Delta z} \text{ y en el límite tendremos } f_{pz} = -\frac{dp}{dz}$$

donde $\Delta p/\Delta z$ representa la fuerza por unidad que experimenta la masa Δm a lo largo del eje Z . Podemos generalizar esta ecuación para las tres dimensiones del espacio repitiendo lo anterior y tendremos,

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p$$

es decir, la fuerza por unidad de volumen (Ec. 8.1) que mueve el elemento de fluido resulta del gradiente de presión ∇p a que se encuentra sometido.

8.6.1. Ecuación de Bernouilli

Como se observa en la Fig. 8.13, consideremos un elemento de fluido de masa $\Delta m = \rho A \Delta s$ de longitud Δs y sección A que se mueve a lo largo de una línea de corriente donde la $\mathbf{u}(s)$ y presión y $p(s)$ son función de la longitud del arco s . La ecuación de movimiento en la dirección tangente a la línea de corriente es,

$$\Delta m \frac{\Delta u}{\Delta t} = F_p + F_g$$

en donde $F_p = -\Delta p A$ es la fuerza que ejerce la presión y F_g será,

$$F_g = -\Delta m g \cos \theta = -(\rho A \Delta s) g \cos \theta = -\rho g A \Delta z$$

Podemos transformar el término de la izquierda ,

$$(\rho A \Delta s) \frac{\Delta u}{\Delta t} = -\Delta p A - \rho g A \Delta z$$

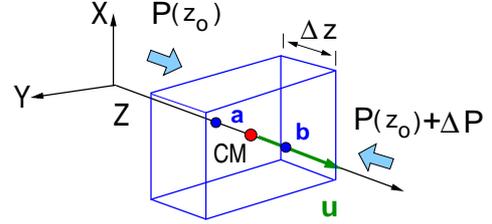


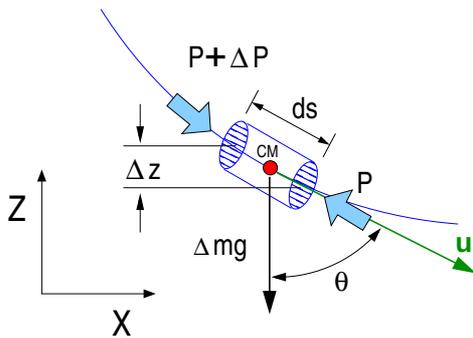
Figura 8.12: Elemento de volumen $\Delta V = \Delta X \Delta Y \Delta Z$ que se mueve a lo largo del eje Z .

⁴Una deducción mas detallada se encuentra en la sección 9.12 del capítulo *Complementos*.

$$\rho A \Delta s \frac{\Delta u}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta s}{\Delta t} \Delta u = \rho A u \Delta u$$

sustituyendo,

$$\rho A u \Delta u = -\Delta p A - \rho g A \Delta z \quad \text{y tomando el límite} \quad u du = -\frac{dp}{\rho} - g dz$$



Podemos integrar esta ecuación a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + g z = cte$$

Cuando la densidad $\rho(s) = \rho_o$ es constante tendremos,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_o} + g z = cte$$

Figura 8.13: Elemento de volumen de sección A que se mueve a lo largo de una línea de corriente contenida en el plano (Z, Y) .

Esta ecuación se denomina *ecuación de Bernoulli* y expresa la conservación de la energía del fluido a lo largo de una línea de corriente.

También podemos deducir la ecuación de Bernoulli empleando un método equivalente. Como puede observarse en la Fig. 8.14 el elemento de masa $\delta m = \rho \delta V$ se mueve siguiendo una línea de corriente entre los puntos a y b cuyas presiones respectivas son p_a y p_b . En su movimiento experimenta una variación de energía $\Delta E = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot}$ que ha de ser igual al trabajo de la presión *sobre* el elemento del fluido $\Delta W = -(p_b - p_a) \delta V$ en donde δV es la variación de volumen que experimenta. Tendremos,⁵

$$\Delta E_{cin} = \frac{\delta m}{2} (u_b^2 - u_a^2) \quad \text{y} \quad \Delta E_{pot} = \delta m g (z_b - z_a)$$

Igualando $\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W$

$$-(p_b - p_a) = \frac{1}{2} \frac{\delta m}{\delta V} (u_b^2 - u_a^2) + \frac{\delta m}{\delta V} g (z_b - z_a)$$

y finalmente tomado el límite $\delta V \rightarrow 0$ obtenemos,

$$\frac{u_a^2}{2} + g z_a + \frac{p_a}{\rho_a} = \frac{u_b^2}{2} + g z_b + \frac{p_b}{\rho_b}$$

es decir, para cualquier punto r sobre una misma línea de corriente es constante la siguiente cantidad,

$$\frac{u^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} = cte. \tag{8.7}$$

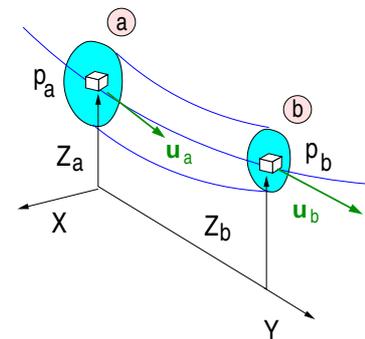


Figura 8.14: Cubo de masa δm que se mueve a lo largo de una línea de corriente.

⁵La misma deducción se encuentra en el vol. II, pag. 40-10 de la Ref. [7] y otra formulación alternativa se encuentra en la Sec. 9.14, pags. 280-285, Vol I de la Ref. [1].

Para un fluido en movimiento estacionario en el que las únicas fuerzas relevantes son la gravedad y la presión la Ec. 8.7 nos permite relacionar las velocidades en dos puntos de la corriente. La cantidad gz es la *energía potencial gravitatoria por unidad de masa*.

Ejemplo: Podemos aplicar la Ec. 8.7 para calcular la velocidad a la que sale el líquido del depósito de la Fig. 8.15 en el que se le ha practicado un orificio a una altura H de su superficie libre.

Suponemos que el depósito es de gran tamaño para que podamos considerar el flujo estacionario y el diámetro d del orificio pequeño frente a la altura de la columna de líquido H , aunque lo bastante grande para que podamos despreciar las fuerzas capilares y viscosas en el orificio de salida.

En la Fig. 8.15 se han representado varias líneas de corriente y consideremos la línea a trazos entre la superficie (punto a) y el punto b que es la intersección con la sección d de salida del líquido. Este escapa del depósito puesto que su densidad es mayor que la del aire $\rho_L \gg \rho_A$. La presión a la altura del punto b dentro del líquido será $p_o + \rho_L(H - z_b)$ mucho mayor que la que existe en el exterior del depósito $p_o + \rho_A(H - z_b) \simeq p_{atm}$.

El líquido parte del reposo $u_a = 0$ en la superficie, $p_a \simeq p_b = p_o$ empleando la Ec. 8.7,

$$g(z_a - z_b) = \frac{u_b^2}{2}$$

y como $H = z_a - z_b$ obtenemos la velocidad a la que sale el líquido, $u_b = \sqrt{2gH}$.

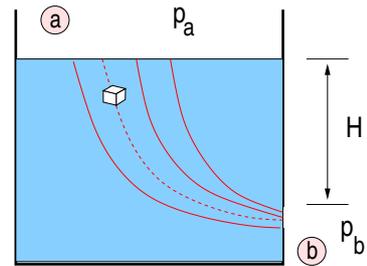


Figura 8.15: Líneas de corriente durante el vaciado de un depósito

9.1. Sistemas coordenados

Aunque siempre necesitaremos tres números para determinar la posición de un punto P en el espacio, suele ser conveniente especificar ésta empleando diferentes *sistemas coordenados*. La razón es que suelen encontrarse ecuaciones más sencillas cuando el sistema coordenado utilizado respeta las simetrías del problema.

Como se muestra en la Fig. 9.1, las *coordenadas cartesianas rectangulares* caracterizan la posición de un punto en el espacio respecto de un triedro (O, X, Y, Z) mediante las proyecciones de su vector de posición $\mathbf{r}_p = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$ del punto P a lo largo de los tres ejes perpendiculares. Este sistema suele ser aconsejable cuando las tres direcciones del espacio son variables independientes.

Si el problema tiene geometría axial, suele ser aconsejable emplear las *coordenadas cilíndricas* en las que la posición de P se caracteriza mediante su coordenada z , la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) y el ángulo θ que forma ésta última con el eje X . Como se deduce de la Fig. 9.1. La relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas es,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y la posición del punto P se especifica mediante las cantidades (r, θ, z) . Las superficies con $r = \text{cte.}$ son cilindros concéntricos cuyo eje de simetría contiene al versor \mathbf{k} . Puede intuirse que este sistema coordenado resultará útil en problemas con simetría alrededor de un eje que podemos alinear con el eje Z .

En este sistema coordenado podemos definir unos vectores unitarios a lo largo de la dirección radial y la del ángulo θ como se indica en la figura. Tendremos,

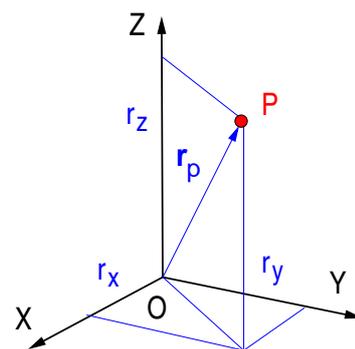


Figura 9.1: Coordenadas cartesianas rectangulares del punto P .

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

que junto con el vector unitario \mathbf{k} satisfacen los productos vectoriales:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta, \quad \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}$$

Estos vectores unitarios son muy útiles cuando por ejemplo, una partícula se mueve describiendo una circunferencia, ya que \mathbf{u}_θ es colineal con la velocidad y $\mathbf{u}_r = -\mathbf{n}$.

Finalmente, podemos encontrarnos con situaciones con simetría esférica en donde suele ser aconsejable emplear *coordenadas esféricas* o *polares*.

Como se observa en la Fig. 9.3, la posición del punto P está determinada por la distancia $r = |\mathbf{r}_p|$ al origen O , el ángulo θ que forma \mathbf{r}_p con el eje Z y el que forma la proyección de \mathbf{r}_p sobre el plano (X, Y) .

Tendremos entonces,

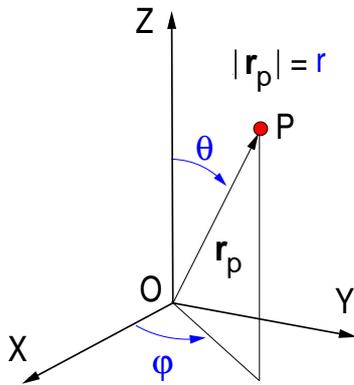


Figura 9.3: Coordenadas esféricas del punto P .

que tengan simetría alrededor de un punto central, o en los que el parámetro fundamental sea la distancia r del punto al origen.

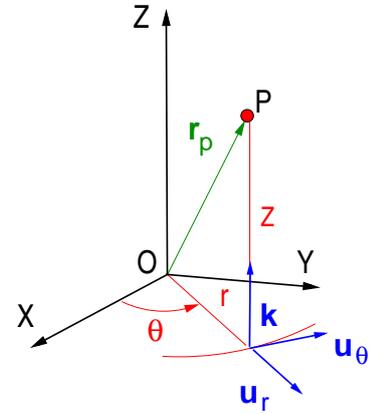


Figura 9.2: Coordenadas cilíndricas del punto P .

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

resultando la posición de P especificada por las cantidades (r, θ, φ) . El ángulo θ varía entre 0 y π de modo que cuando $\theta = 0$ el vector \mathbf{r}_p es paralelo al vector \mathbf{k} y cuando $\theta = \pi$ apunta en la dirección $-\mathbf{k}$.

Puesto que las superficies con $r = cte.$ son esferas con centro en el origen O la utilidad de este sistema coordenado puede suponerse: Las coordenadas esféricas serán útiles en problemas

9.2. La resolución de las ecuaciones del movimiento

La trayectoria $\mathbf{r}_p(t)$ de una partícula P de masa m se obtiene mediante la segunda ley de Newton (Ec. 3.1),

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \tag{9.1}$$

en donde se sustituyen las expresiones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ de las fuerzas que actúan sobre la masas m . Esta ecuación vectorial se desglosa en tres ecuaciones escalares,

$$m\ddot{x}(t) = F_x(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad m\ddot{y}(t) = F_y(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad m\ddot{z}(t) = F_z(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad (9.2)$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones desconocidas que debemos determinar y que son las tres componentes del vector $\mathbf{r}_p(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Cada una de las Ecs. 9.2 es una *ecuación diferencial ordinaria* de *segundo orden*, denominada así porque contiene la derivada segunda (como por ejemplo $\ddot{x}(t)$) de la incógnita.

La resolución de las ecuaciones diferenciales que resultan de substituir en la Ec. 9.1 las expresiones $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ de las fuerzas es –en general– un problema complicado, salvo en los casos simples que estudiaremos en el presente curso. Para encontrar la trayectoria $\mathbf{r}_p(t)$ además de una solución general de la ecuación diferencial 9.1 (o equivalentemente, del sistema de Ecs. 9.2) necesitaremos conocer la *velocidad* $\mathbf{v}_p(t_0)$ y *posición* $\mathbf{r}_p(t_0)$ de la partícula en un instante dado t_0 . A estos datos se les denomina *condiciones iniciales* del movimiento y vamos a ilustrar con un ejemplo su significado.

Consideremos el movimiento en el plano (x, y) de un proyectil de masa m que es lanzado desde el origen (X, Y) en $t = 0$ con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 como se indica en la figura. La única fuerza que actúa durante el movimiento es la gravedad $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ que es constante en el tiempo y resultan (Ecs. 9.2) las ecuaciones diferenciales,

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg \quad (9.3)$$

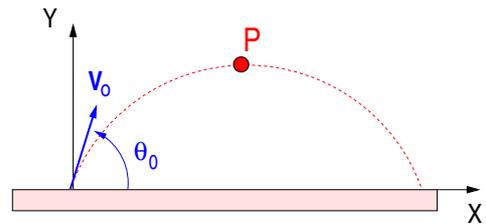


Figura 9.4: Tiro parabólico de la partícula de masa M .

que al ser $F_y = -mg$ una fuerza constante en el tiempo pueden integrarse directamente,

$$v_x = c_{1x} \quad v_y = c_{1y} - gt \quad (9.4)$$

Como puede comprobarse derivando, estas dos velocidades satisfacen las ecuaciones diferenciales 9.3 pero hemos tenido que introducir dos constantes c_{1x} y c_{1y} desconocidas y para determinarlas empleamos las *condiciones iniciales*. Si como se observa en la Fig. 9.4 en el instante inicial $t = 0$ se tiene $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ y $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$ igualando encontramos que $v_{x0} = c_{1x}$ y $v_{y0} = c_{1y}$.

Es decir, las *velocidades iniciales* a lo largo de cada eje determinan, de todas las posibles constantes de integración c_{1x} y c_{2x} en la Ec. 9.4, aquellas que permiten escoger la velocidad $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$ de la partícula compatible con los datos de que disponemos para el instante inicial.

Si efectuamos una nueva integración de las ecuaciones 9.4 tendremos que introducir dos nuevas constantes de integración c_{2x} y c_{2y} ,

$$x(t) = c_{2x} + v_{x0} t \quad y(t) = c_{2y} + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} \quad (9.5)$$

De nuevo hemos de acudir a los datos del instante inicial para determinar las constantes de integración que resultan ser $c_{2x} = x(0) = 0$ y $c_{2y} = y(0) = 0$, relacionadas con las *posiciones iniciales* de la partícula. Como vemos, necesitamos conocer la posición $\mathbf{r}_o = x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j}$ y la velocidad $\mathbf{v}_o = v_{xo}\mathbf{i} + v_{yo}\mathbf{j}$ en un instante dado para determinar la solución (trayectoria) $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ de la Ec. 9.1.

En general, para resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden como la que nos proporciona la segunda ley de Newton necesitamos conocer en un cierto instante de tiempo el valor de la función -la posición de la partícula en nuestro caso- y de su derivada primera -la velocidad- para determinar de entre todas las posibles soluciones de 9.1 la que concuerda con los datos del problema.

9.3. Aproximaciones y series de potencias

En muchas ocasiones hemos de operar con funciones $f(x)$ complicadas que admiten un *desarrollo en serie de potencias* si son derivables infinitas que permite aproximarlas por un polinomio. Si conocemos el valor de la función, sus derivadas en el punto $x = a$ y, éstas toman un valor finito, para otro punto x próximo se tiene,

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} + \frac{1}{2!} (x-a)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=a} + \dots + \frac{1}{n!} (x-a)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=a} \quad (9.6)$$

Este polinomio en potencias de $(x-a)$ se denomina *desarrollo en serie de Taylor* de la función $f(x)$ alrededor del punto $x = a$. Se corresponde con el valor exacto de $f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y con su valor aproximado si tomamos un número finito n de potencias en el desarrollo. Los desarrollos en serie de las funciones más comunes pueden encontrarse en el *Apéndice A* de la Ref. [1].

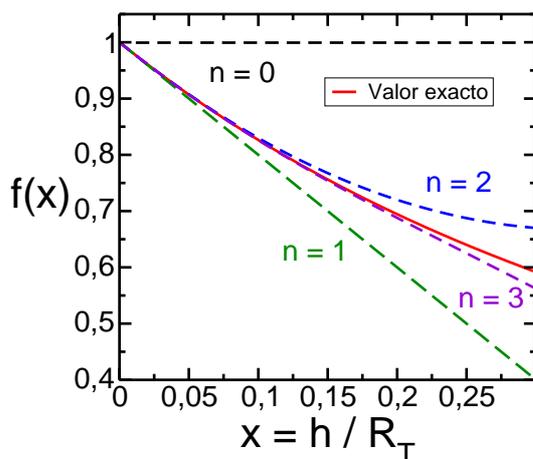


Figura 9.5: Comparación entre $f(x)$ y sus desarrollos en serie de Taylor.

En el desarrollo anterior resulta evidente que -salvo en casos especiales que no consideraremos aquí- cuando $(x-a) \ll 1$ la contribución de los sumandos sucesivos se hace más pequeña a medida que n aumenta al ser cada vez menores las potencias sucesivas $(x-a)^n$ del polinomio anterior.

La utilidad práctica del desarrollo en serie de Taylor 9.6 es permitirnos aproximar los valores de la función $f(x)$ reteniendo sólo unos pocos términos de su desarrollo en serie. Vamos a ilustrar este punto mediante el cálculo de la fuerza F_g que ejerce la Tierra (de radio $R_T = 6400 \text{ km}$) sobre una masa m que se encuentra a una altura h sobre su superficie.

La expresión exacta para F_g es,

$$F_g = -G \frac{m m_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|^2} = -G \frac{m m_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} = -m g \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}$$

donde el cociente $h/R_T \ll 1$, resulta ser un parámetro pequeño que compara la altura $h \ll R_T$ de la partícula con el radio de la Tierra.

Si desarrollamos en potencias de $(x - a)$ con $a = 0$ y $x = h/R_T$ en el desarrollo 9.6 para los tres primeros términos obtenemos,

$$f(x) = \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} \simeq [1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3(\frac{h}{R_T})^2 - 4(\frac{h}{R_T})^3 + \dots] \quad (9.7)$$

Podemos escribir las sucesivas aproximaciones de $f(x)$ como polinomios $P_n(x)$ en potencias de $(h/R_T)^n$ de modo que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1$ (o equivalentemente $f(x) \simeq 1$) y obtenemos entonces $F_g = -mg$. Con esta aproximación la fuerza resultaría independiente de la altura h a la que se encuentra la masa m . Evidentemente $f(x) \simeq 1$ cuando $x \ll 1$, es decir para alturas h despreciables frente al radio de la tierra R_T . A medida que h aumenta la aproximación falla y hemos de tomar polinomios $P_n(x)$ con n crecientes, con $n = 1, 2, 3$ tenemos,

$$P_1(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} \quad , \quad P_2(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T}\right)^2$$

$$P_3(x) = 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left(\frac{h}{R_T}\right)^2 - 4 \left(\frac{h}{R_T}\right)^3$$

En la Fig. 9.5 se han representado el valor exacto de $f(x)$ (línea continua) con los cuatro polinomios $P_n(x)$ anteriores (líneas a trazos) que resultan de tomar en el desarrollo potencias 9.7 crecientes.

Como podemos observar en la Fig. 9.5, la aproximación de una fuerza de gravedad $F_g \simeq mg$ independiente de la altitud ($n = 0$) es muy pobre desde el momento que existe una altura h apreciable. Sin embargo, la diferencia entre el valor exacto de la función $f(x)$ y sus tres aproximaciones es muy pequeña para $x = (h/R_T) < 0,025$, que equivale a alturas $h < 160$ Km. Es decir, podríamos emplear el polinomio $P_1(x)$ para obtener una buena aproximación de $f(x)$ hasta alturas menores que el 2.5 % del radio terrestre. Para valores $x = (h/R_T) < 0,1$ podríamos emplear $P_2(x)$ y hasta aproximadamente $x = (h/R_T) < 0,175$ el último polinomio $P_3(x)$.

Como vemos, la aproximación por un polinomio de grado m estará justificada siempre que la contribución de los términos de las potencias en $(h/R_T)^n$ con $n > m$ pueda despreciarse. Si incrementamos la potencia n en el desarrollo 9.6 mejoraremos la aproximación de $f(x)$ para valores de $x = h/R_T$ mayores aunque la expresión es más complicada.

En muchas ocasiones es conveniente emplear sólo algunos términos del desarrollo en serie de Taylos de una función $f(x)$ complicada, y el número de términos depende del grado de aproximación que necesitamos.

9.4. Propiedades de la elipse

Como se observa en la Fig. 9.6 la elipse puede definirse mediante la relación $|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$ en donde los puntos F y F' son denominados *focos*. Cuando la distancia entre estos dos puntos $|arFF'| = 2c$ es nula ($c = 0$) ambos focos coinciden con el punto O y la elipse se reduce a una circunferencia de radio $R = 2a = 2b$. Las distancias a y b son denominadas *semiejes mayor* y *menor* de la elipse y su área es $A = \pi a b$.

La ecuación de una elipse con centro C en el punto (x_o, y_o) en coordenadas cartesianas es,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \quad (9.8)$$

la distancia del punto mas alejado de cada foco es $d_{max} = a + c$ y la del mas cercano $d_{min} = a - c$ y para el punto Q resulta,

$$2a = |\overline{QF}| + |\overline{QF'}| = 2 \sqrt{b^2 + c^2}$$

de modo que $a^2 = b^2 + c^2$.

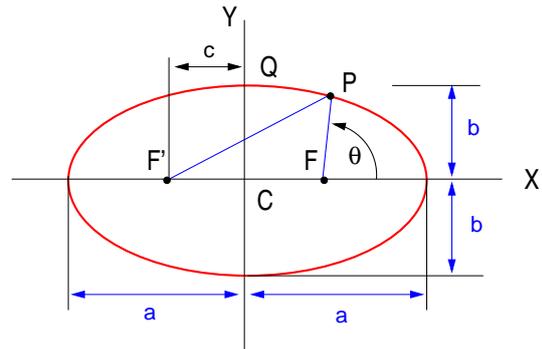


Figura 9.6: Elipse

En algunos casos, como en el movimiento planetario, es útil expresar la ecuación de la elipse en coordenadas polares con origen en el foco F , tomando el ángulo θ que forma \overline{FP} con el eje X . Podemos introducir un parámetro $0 \leq \epsilon = c/a < 1$ denominado *excentricidad*, cuando $\epsilon = 0$ ambos focos coinciden y la elipse se convierte en una circunferencia mientras que en el límite $\epsilon = 1$ degenera en una parábola.

Empleando la ley del coseno al triángulo FPF' , como $|FF'| = 2a\epsilon$ tendremos

$$|\overline{PF'}|^2 = |\overline{PF}|^2 + 4a^2 \epsilon^2 + 4\epsilon a |\overline{PF}| \cos \theta$$

Si la distancia al foco F es $r = |\overline{PF}|$ y substituimos $|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$ resulta,

$$4a^2 - 4a^2 \epsilon^2 = 4ra + 4ar\epsilon \cos \theta$$

y finalmente

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

Cuando $\epsilon = 0$ la distancia $r = a$ es entonces constante, lo que correspondería a una órbita planetaria circular, mientras que si $\epsilon > 0$ la distancia $r(\theta)$ es diferente para cada ángulo θ .

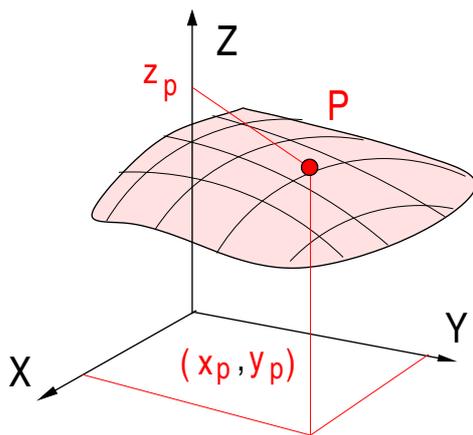


Figura 9.7: Superficie $z = F(x, y)$.

9.5. Campos escalares y vectoriales

En la Física tratamos con magnitudes que pueden ser *escalares* o *vectoriales* que se encuentran definidas sobre regiones del espacio. Un *campo escalar* es una función de tres variables que asigna a cada punto del espacio (x, y, z) el valor de una cierta magnitud $P(x, y, z)$.

Un ejemplo se muestra en la Fig. 9.7 en la que la función escalar $z = F(x, y)$ asocia a cada punto del plano (x_p, y_p) una altura z_p de modo que el conjunto de puntos P definen la superficie S . Otros ejemplos de funciones escalares son el potencial gravitatorio $U(\mathbf{r})$ (sección 3.4.2) o el potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$ (sección 3.4.3).

Un *campo vectorial* es un función que asigna un vector $\mathbf{V}(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de una cierta región del espacio. Cada una de las componentes del vector corresponden a una función escalar de modo que,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

Por último, los campos escalares y vectoriales también pueden depender del tiempo y entonces tendremos $P(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

9.6. Derivadas parciales

Las derivadas parciales son una generalización para funciones de varias variables $F(x, y, z, \dots, t)$ del concepto de derivada $f'(x)$ de una función de una variable. Para introducir el concepto consideremos una función escalar $z = F(x, y)$ que, como muestra la Fig. 9.7, asigna a cada punto del plano (x, y) una altura z y que define la superficie S .

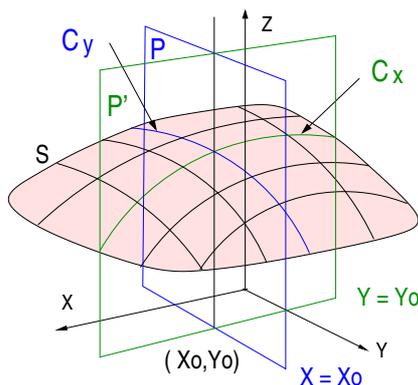


Figura 9.8: Intersección de la superficie S con los planos P y P'

Como muestra la Fig. 9.8 las intersecciones de dicha superficie con los planos P y P' paralelos respectivamente a los planos (Y, Z) y (X, Z) que pasan por las coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ definen las curvas C_x y C_y . Si hacemos que el punto de y_0 recorra el eje Y encontraremos una familia de planos paralelos a P' y al plano (X, Z) que cortarían a la superficie S a lo largo sucesivas curvas paralelas. Lo mismo sucede al recorrer x_0 el eje X para las intersecciones de S con planos paralelos a P .

Para cada punto y_0 sobre el eje Y , podemos introducir el siguiente límite para la curva contenida en el plano P' ,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{(x, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y_0) - F(x, y_0)}{\Delta x} \quad (9.9)$$

que define la *derivada parcial* de la función $z = F(x, y)$ respecto de la variable x .

En la Fig. 9.8 puede comprobarse su significado geométrico. Una vez fijado un punto $y = y_0$ el corte del plano P' con la superficie S nos proporciona la curva C_y , y la derivada parcial corresponde a la pendiente en cada punto a dicha curva contenida en el plano P' . Es decir, la derivada ordinaria de la curva C_x manteniendo constante la coordenada y_0 .

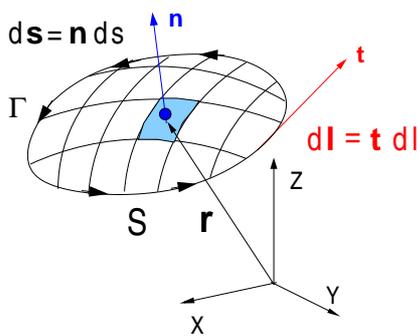
Análogamente podemos introducir la derivada parcial respecto de la variable y ,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y + \Delta y) - F(x_0, y)}{\Delta y}$$

a lo largo de las intersecciones con la superficie S de planos paralelos a P .

Este concepto de derivada parcial se extiende a funciones de más de dos variables $G(x_1, x_2, \dots, x_N)$ como derivada respecto de la variable x_j y también se definen derivadas de orden superior,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$



Las reglas de derivación son las mismas que para las derivadas ordinarias, basta considerar como constantes aquellas variables respecto de las que no calculamos la derivada. Vamos a ilustrar esta regla sencilla mediante un ejemplo. Para la función,

$$V(x, y) = \frac{x}{y} + x^5 y^2 + x \cos(y)$$

se tienen las siguientes derivadas parciales.

Figura 9.9: Superficie S que se apoya en la curva Γ .

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{y} + 5x^4 y^2 + \cos(y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 2x^5 y - x \sin(y)$$

9.7. Curvas y superficies: Convenio de signos

En la figura 9.9 se muestra una superficie S en el espacio delimitada por una curva Γ en la que se apoya. La orientación de una superficie en el espacio se caracteriza mediante un vector unitario \mathbf{n} perpendicular a la misma en cada punto y cuando es cerrada se toma \mathbf{n} a lo largo de la *normal exterior* a la misma. El elemento de superficie es $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la misma en cada punto y $dS = dx dy$ el elemento de área.

Podemos también definir el vector $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ sobre la curva Γ , en donde dl es el elemento de longitud y \mathbf{t} un vector unitario tangente a la curva en cada punto como se indica en la Fig. 9.9.

El sentido *positivo* del recorrido de Γ respecto de un triedro orientado a derechas como el de la figura se toma el contrario a las agujas del reloj. En el dibujo las flechas indican el sentido positivo del vector $d\mathbf{l}$.

9.8. Integral de línea

Consideremos una función vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ definida en una zona del espacio,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(x, y, z) \mathbf{i} + A_y(x, y, z) \mathbf{j} + A_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

y una expresión $\mathbf{r}(t)$ que describe una curva C , como por ejemplo, la trayectoria de un punto material en el espacio de modo que en cada punto de la curva la función vectorial toma el valor $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t))$.

Como muestra la Fig. 9.10 entre dos puntos de la curva A y B dados podemos dividirla en N tramos pequeños de longitud $|\Delta \mathbf{r}_j|$ definidos por los vectores $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$ donde la función toma los valores $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$. En cada uno de los $j = 1, \dots, N + 1$ puntos podemos construir los productos escalares,

$$\mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j = |\mathbf{A}_j| |\Delta \mathbf{r}_j| \cos \theta_j$$

en donde θ_j es el ángulo que forma a lo largo de la curva el vector $\Delta \mathbf{r}_j$ con el vector \mathbf{A}_j . Si efectuamos la suma,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j$$

Podemos considerar el límite haciendo que el número de tramos N en que dividimos la curva C entre A y B aumente indefinidamente, resultando las distancias $|\Delta \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|$ cada vez más pequeñas.

De este modo el vector $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} \rightarrow d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ es paralelo al vector \mathbf{t} tangente a la curva en cada punto cuyo módulo infinitesimal es la longitud de arco dl . Tendremos entonces,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j \rightarrow \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Esta última expresión se la denomina *integral de línea* o *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a lo largo de la curva C entre los puntos A y B considerados. Al vector $d\mathbf{l}$ se le aplican los criterios discutidos en la Pag. 94 sobre el sentido de recorrido de la curva C ¹.

Cuando la curva es cerrada se suele indicar en el signo integral mediante,

$$I = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

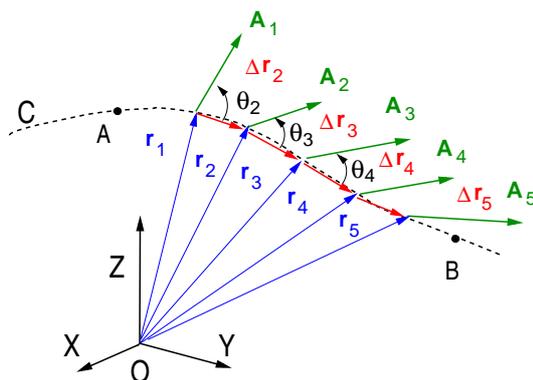


Figura 9.10: Curva C definida en un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

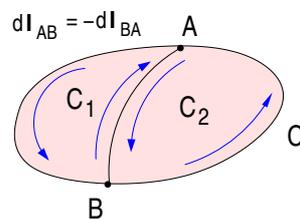


Figura 9.11: La curva cerrada C se descompone en dos C_1 y C_2 .

¹La integral de línea se introduce en la Sec. 8.2, pags. 203-206 Vol I de la Ref. [1] en el contexto del *trabajo* de una fuerza.

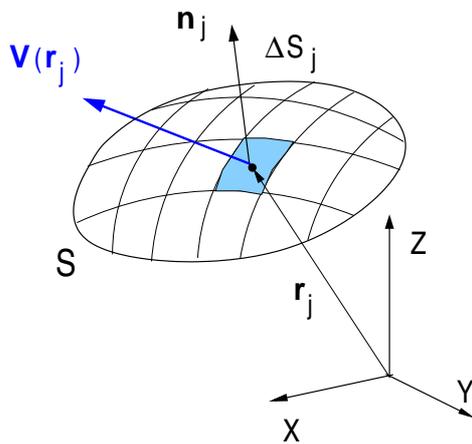
y además, si la curva es una función suave, como se muestra en la Fig. 9.11, puede descomponerse en dos curvas C_1 y C_2 que compartan un tramo común AB . Si extendemos la integral de línea sobre los bordes de cada uno de los dos recintos de la Fig. 9.11 tendremos,

$$I = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Evidentemente la circulación del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en el sentido AB será igual y cambiada de signo a la del sentido BA y a lo largo de este tramo $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$,

$$\int_A^B \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_B^A \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2$$

9.9. Flujo de un campo vectorial



Si tenemos una función vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ definida en una cierta región del espacio y una superficie S como indica la Fig. 9.12. Esta última puede dividirse en N cuadrados infinitesimales de área ΔS_j situados en los puntos \mathbf{r}_j y caracterizados por un vector unitario \mathbf{n}_j centrado en el mismo.

Podemos definir el vector $\delta \mathbf{S}_j = \Delta S_j \mathbf{n}_j$ situado en \mathbf{r}_j . sobre cada una de las N losetas en donde la función vectorial toma el valor $\mathbf{V}(\mathbf{r}_j)$. Sumando los productos escalares,

$$\delta \phi_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot \delta \mathbf{S}_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j$$

Figura 9.12: Flujo de un campo vectorial a través de la superficie S

definidos sobre cada uno de los $j = 1, \dots, N$ elementos infinitesimales de S .

$$\Delta \phi = \sum_{j=1}^{j=N} \delta \phi_j = \sum_{j=1}^{j=N} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j$$

y tomando el límite cuando $\Delta S_j \rightarrow 0$ podemos reemplazar el sumatorio por una integral,

$$\sum_{j=1}^{j=N} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_j \Delta S_j \rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{S} \quad (9.10)$$

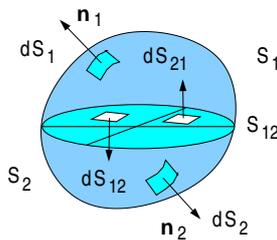
en donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ es el elemento de superficie siendo \mathbf{n} el vector unitario normal a la misma en cada punto. A la integral 9.10 se la denomina *flujo del campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S* y al vector $d\mathbf{S}$ se le aplican los criterios discutidos en la Pag. 94 ².

²Este concepto se introduce en la Sec. 16.2, pags. 577-578 Vol II de la Ref. [1]

El *flujo* de un campo vectorial a través de una superficie es aditivo, es decir si descomponemos una superficie S en dos trozos S_1 y S_2 como en la Fig. 9.13 que comparten la zona sombreada común S_{12} sobre la cual $d\mathbf{S}_{12} = -d\mathbf{S}_{21}$ por lo tanto,

$$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_{12}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{12} + \int_{S_{21}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{21} + \int_{S_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_2$$

Los dos primeros sumandos son justamente el flujo ϕ_{S_1} sobre la mitad superior de la Fig. 9.13,



$$\phi_{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_{12}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}_{12}$$

y lo mismo sucede para ϕ_{S_2} en la mitad inferior, de este modo,

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2}$$

Figura 9.13: Superficie S dividida en S_1 y S_1 .

9.10. El operador nabla: Gradiente y divergencia

Si tenemos definidas en cada punto (x, y) las derivadas parciales de la función $F(x, y)$ que define la superficie S de la Fig. 9.14 podemos construir el siguiente vector,

$$\mathbf{q}(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{j}$$

que se denomina *gradiente* de la función $F(x, y)$ y se expresa como $\mathbf{q} = \nabla F$, y como vemos en la Fig. 9.14 sería un vector tangente a la superficie S en el punto (x_o, y_o) . Al operador

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se le denomina *operador nabla*. Para una función de tres variables $h(x, y, z)$ generalizando la definición anterior se tendrá,

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

pero no tiene una interpretación geométrica tan sencilla³. Si diferenciamos la función $h(x, y, z)$, obtenemos,

³Puede consultarse la sección 8.7 Vol I de la Ref. [1], pags. 217-218 y la Ref. [2] sección 3.6, pags. 101-102. Una discusión pormenorizada se encuentra en la Ref. [4], sección 5.7, pags. 153-157.

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz$$

que puede entenderse como el producto escalar $dh = d\mathbf{r} \cdot \nabla h$ de los vectores $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ y $\mathbf{q} = \nabla h$. Geométricamente dh representa el cambio que experimenta la función h al pasar del punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ al punto $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$,

$$dh = d\mathbf{r} \cdot \nabla h = |d\mathbf{r}| |\nabla h| \cos(\theta)$$

en donde θ es el ángulo formado por los vectores $d\mathbf{r}$ y ∇h . Para una distancia fija $|d\mathbf{r}|$ del punto \mathbf{r} el cambio dh será máximo cuando $\theta = 0$, es decir cuando $d\mathbf{r}$ y $\mathbf{q} = \nabla h$ son paralelos. En cada punto \mathbf{r} el vector $\mathbf{q} = \nabla h$ apunta en la dirección en la que el cambio de $h(x, y, z)$ es más rápido y su módulo representa el incremento de h por unidad de longitud en esa dirección.

Si $\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s$ es un pequeño desplazamiento a partir del punto \mathbf{r}_o de longitud Δs a lo largo de la dirección que marca el vector unitario \mathbf{n} entonces,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s) - h(\mathbf{r}_o)}{\Delta s}$$

representa la derivada de la función $h(x, y, z)$ a lo largo de la dirección \mathbf{n} . Desarrollando en serie de potencias,

$$h(\mathbf{r}_o + \mathbf{n} \Delta s) = h(\mathbf{r}_o) + (\mathbf{n} \Delta s) \cdot \nabla h + O(\Delta s^2)$$

y podemos identificar,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \nabla h \cdot \mathbf{n} \quad (9.11)$$

La proyección del vector gradiente $\mathbf{q} = \nabla h$ a lo largo de una dirección \mathbf{n} es igual a la derivada de dicha función tomada a lo largo de la misma. Esta propiedad puede comprobarse en un caso particular importante, cuando la función es de la forma $h(x, y, z) = h(r)$ es decir, sólo depende de la distancia $|\mathbf{r}| = r$ tendremos,

$$\nabla U = \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

y donde $\partial h / \partial r = dh / dr = h'(r)$ y las otras derivadas son análogas,

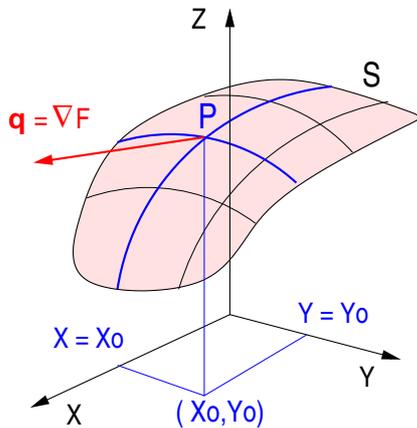
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

resultando finalmente una expresión sencilla,

$$\nabla h = \frac{dh}{dr} \left(\frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dh}{dr} \quad (9.12)$$

Como vemos es una aplicación de la Ec. 9.11 con $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ y la hemos empleado implícitamente cuando definimos la energía potencial gravitatoria en la Pag. 24.

También podemos hacer actuar el operador nabla sobre una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ formando el siguiente producto escalar,



$$\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x(\mathbf{r}) \mathbf{i} + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{j} + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{k})$$

que escribimos como,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (9.13)$$

y esta operación se la denomina *divergencia* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

El flujo de un campo vectorial (Ec. 9.10) está relacionado con la divergencia del mismo que nos proporciona la Ec. 9.13. Consideremos un volumen infinitesimal como el de la Fig. 9.15, $dV = dx dy dz$ donde existe un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Figura 9.14: Vector $\mathbf{q} = \nabla F$ en el punto P .

Las superficies en y_1 e $y_1 + \Delta y$ se caracterizan por un vector $\Delta S \mathbf{j} = \Delta X \Delta Z \mathbf{j}$

Si calculamos como cambia el campo a lo largo de la dirección Y perpendicular a las dos superficies dibujadas en y_1 e $y_1 + \Delta y$ tendremos,

$$A_y(y_1 + \Delta y) \simeq A_y(y_1) + \Delta A_y = A_y(y_1) + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y$$

puesto que $\Delta y \ll 1$ y análogamente para las otras direcciones,

$$\Delta A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \quad \text{y} \quad \Delta A_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z$$

Sobre el primer plano en $y = y_1$ podemos calcular,

$$\phi_y(y_1) = A_y(y_1) \Delta X \Delta Z$$

y para $y = y_1 + \Delta y$ se tiene,

$$\phi_y(y_1 + \Delta y) = A_y(y_1 + \Delta y) \Delta X \Delta Z$$

La función $\phi_y(y_1)$ es un escalar que resulta de multiplicar el valor que toma la componente A_y del campo vectorial en dicho punto por el área de la superficie infinitesimal y es el *flujo* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través del área Δs ⁴.

La diferencia entre ambas caras es,

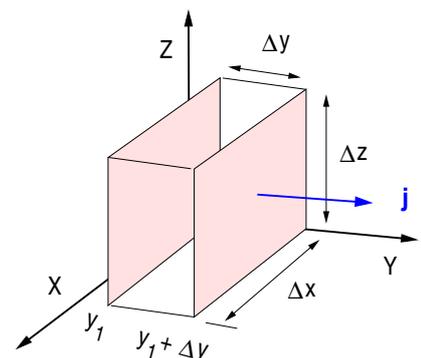


Figura 9.15: Cubo de volumen infinitesimal dV

⁴Una introducción de este concepto se encuentra en la página 96

$$\Delta\phi_y = [A_y(y_1 + \Delta y) - A_y(y_1)] \Delta X \Delta Z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y repitiendo el mismo procedimiento para las otras dos direcciones X y Z ,

$$\Delta\phi_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V \quad \text{y} \quad \Delta\phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V$$

Sumando las tres contribuciones $\Delta\phi = \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z$ tendremos para todo el volumen infinitesimal ΔV ,

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V \quad (9.14)$$

Por ejemplo si \mathbf{E} es el campo eléctrico, el *flujo* $\Delta\phi$ del campo eléctrico que atraviesa el volumen infinitesimal ΔV se relaciona con la divergencia de \mathbf{E} mediante,

$$\Delta\phi = (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V$$

y tomando de nuevo el límite $\Delta V \rightarrow 0$ e integrando sobre el volumen V_s que encierra una superficie cerrada S ,

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V_s} \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

Para una función *escalar* $H(\mathbf{r})$ existe una igualdad muy parecida, salvo que en lugar de la divergencia aparece el vector *gradiente* ∇H de la función escalar. Podemos razonar de modo análogo al caso de una función vectorial, sobre ambas caras de la Fig. 9.15 tendremos,

$$H|_{(y_1)}(\Delta X \Delta Z) \mathbf{j} \quad \text{y} \quad H|_{(y_1 + \Delta y_1)}(\Delta X \Delta Z) \mathbf{j}$$

y si construimos la diferencia,

$$\Delta\varphi_y \mathbf{j} = (H|_{(y_1 + \Delta y_1)} - H|_{(y_1)}) \Delta S \mathbf{j} = \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} (\Delta X \Delta Y \Delta Z)$$

Sumando las contribuciones de las tres direcciones del espacio,

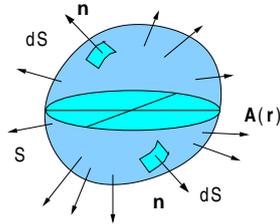
$$\Delta\varphi_x \mathbf{i} + \Delta\varphi_y \mathbf{j} + \Delta\varphi_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Delta V = \nabla H \Delta V$$

aunque ahora el término de la izquierda no es el flujo de un vector sino la integral de la función $H(x, y, z)$ sobre la superficie S caracterizada por el vector $d\mathbf{S}$,

$$H(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \nabla H dV \quad (9.15)$$

Aunque resulta muy semejante a la Ec. 9.14 hay que subrayar que es una igualdad *vectorial* mientras que 9.14 es una ecuación *escalar*.

9.11. El teorema de Gauss



De la ecuación 9.14 podemos extraer una importante consecuencia si la combinamos con la definición de flujo del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de la ecuación 9.10. Tomando el límite $\Delta V \rightarrow 0$ e integrando sobre el volumen,

$$\int \Delta\phi = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V \rightarrow \phi = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

Figura 9.16: Flujo del campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S .

y combinándolo con la definición de *flujo* de \mathbf{A} a través de la superficie S que encierra el volumen V_S de la Ec. 9.10 tendremos,

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_S} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \tag{9.16}$$

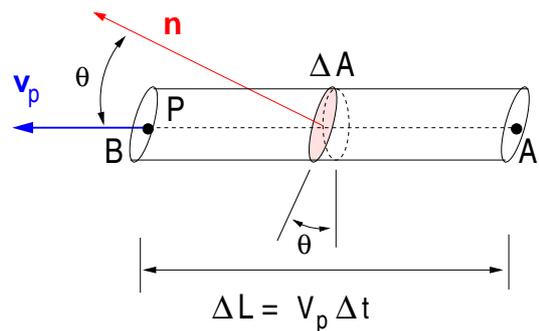
Esta igualdad se denomina *Teorema de la Divergencia* o *de Gauss* y como se observa en la Fig. 9.16 relaciona el *flujo* del campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a través de la superficie S que encierra al volumen V_S con el valor de la integral de su divergencia en el interior de dicho volumen.

La igualdad integral análoga para una función escalar $H(\mathbf{r})$ de acuerdo con la Ec. 9.15 será,

$$\int_S H(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int_{V_S} (\nabla H) dV \tag{9.17}$$

9.12. Ecuación de continuidad y vector flujo másico

Consideremos una superficie S como se indica en la Fig. 8.3 que es atravesada por una corriente de fluido. En la Fig. 9.17 se muestra la ampliación de la superficie infinitesimal de área ΔA situada en el punto \mathbf{r} . Esta se caracteriza por un vector normal unitario \mathbf{n} que forma un ángulo θ con el vector velocidad del fluido \mathbf{v}_p en dicho punto. Durante el intervalo de tiempo infinitesimal Δt podemos considerar constante la velocidad \mathbf{v}_p del punto característico P mientras pasa de A a B .



A lo largo de Δt la longitud que recorre P es $\Delta L = v_p \Delta t$ y el volumen de fluido encerrado en el tubo de la figura será,

Figura 9.17: Corriente que atraviesa una superficie infinitesimal ΔA durante el tiempo Δt .

$$\Delta V = \Delta L \Delta A \cos \theta$$

y la masa del fluido encerrada en dicho tubo,

$$\Delta M = \rho(\mathbf{r}, t) \Delta V = \rho(\mathbf{r}, t) v_p \Delta A \cos \theta \Delta t$$

Calculamos la masa de fluido que atraviesa la sección ΔS durante el tiempo Δt como,

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} \Delta A$$

y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ e integrando sobre todos los puntos P de la superficie S de la Fig. 8.3

$$\frac{dM}{dt} = \int_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

en donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido en cada punto \mathbf{r} sobre S . Esta última ecuación nos proporciona la cantidad de masa que pasa por la superficie S en la unidad de tiempo.

Se define el vector $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}$, denominado *densidad de flujo másico* como la masa que atraviesa la superficie tangente a las líneas de corriente por unidad de tiempo y superficie ⁵. La integral,

$$\frac{dM}{dt} = \int_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} dA$$

es el *flujo* del vector de flujo másico a través de la superficie S ⁶. En el caso de que la superficie S sea cerrada como la de la Fig. 9.18 hay que considerar además el sentido de \mathbf{j}_m respecto de la normal \mathbf{n} a la superficie,

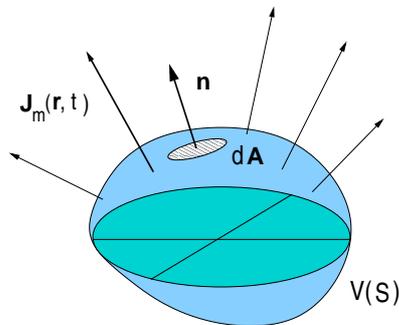


Figura 9.18: Vector flujo másico $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$ que atraviesa la superficie cerrada S que encierra el volumen $V(S)$.

$$\frac{dM}{dt} = - \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} \quad (9.18)$$

De nuevo esta ecuación describe la variación en el tiempo de la masa encerrada dentro de la superficie S . El vector flujo másico es paralelo a la velocidad \mathbf{v} y si la materia *sale* de S apunta hacia el exterior siendo paralelo a $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$, luego $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} > 0$ y la masa contenida en el volumen V disminuye. El caso contrario $dM/dt > 0$ se tiene cuando la corriente *entra* en S y $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{A} < 0$ ya que ambos vectores apuntan en sentidos contrarios.

La Ec. 9.18 puede expresarse de otro modo, empleando el Teorema de Gauss ⁷ para transformar el flujo de \mathbf{j}_m a través de la superficie S en una integral de volumen,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_S} \rho dV + \int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{j}_m dV = \int_{V_S} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m \right) dV = 0$$

Puesto que el volumen V_S es arbitrario ha de ser nulo el integrando y encontramos la *ecuación de continuidad*,

⁵Puede consultarse la sec. III.2, pags. 414-415 de la Ref. [5]

⁶El concepto de flujo de un campo vectorial a través de una superficie se encuentra en la Pag. 96 de la sección *Complementos*.

⁷Esta transformación es la Ec. 9.16 de la Pag 9.11 del capítulo *Complementos*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0 \quad (9.19)$$

que expresa la conservación de la masa del fluido.

9.13. Los ejes principales de inercia

Si escogemos un punto O' arbitrario como origen del triedro S' ligado al sólido el tensor de inercia \mathbf{I} toma su forma general,

$$\mathbf{I}_{S'} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, por ser simétrico y todos sus elementos de matriz reales siempre existirá una transformación ortogonal de coordenadas del triedro S' a otro S'' en el que \mathbf{I} tome su expresión mas sencilla que es la forma diagonal.

$$\mathbf{I}_{S''} = \begin{pmatrix} I_{x''x''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y''y''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z''z''} \end{pmatrix}$$

siendo los ejes (X'', Y'', Z'') mutuamente perpendiculares.

Esta propiedad está garantizada por un teorema de diagonalización de matrices reales simétricas cuyos detalles pueden encontrarse en la Sec. 10.4 de la Ref. [2]. Los tres autovalores de la matriz $\mathbf{I}_{S'}$, (los momentos de inercia $I_{x''x''}$, $I_{y''y''}$ y $I_{z''z''}$) son las tres raíces λ_1 , λ_2 y λ_3 del polinomio en potencias de λ que resulta del determinante,

$$\begin{vmatrix} (I_{x'x'} - \lambda) & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & (I_{y'y'} - \lambda) & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & (I_{z'z'} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Los autovalores pueden ser iguales (se dicen entonces *degenerados*) y sus tres autovectores asociados \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 son siempre ortogonales. Podemos escoger sus direcciones como las de los ejes del nuevo triedro S'' -los ejes principales de inercia- en los que el tensor de inercia resulta ser $\mathbf{I}_{S''}$.

En el caso de un *cuerpo homogéneo con simetrías* no es necesario calcular explícitamente las direcciones de los autovectores ya que basta examinar sus simetrías para determinarlas. Puede demostrarse (Ref. [2] Pags. 444-447) que,

- *Todo plano de simetría de un cuerpo es perpendicular a un eje principal.*
- *Todo eje de simetría de un cuerpo es eje principal. El plano perpendicular a dicho eje es un plano principal correspondiente a un momento principal de inercia degenerado.*

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Alonso y E.J. Finn *Física* (3 Vols) Volumen I. Addison Wesley Iberoamericana (1986).
- [2] K.R. Symon, *Mecánica* Ed. Aguilar, Madrid (1977).
- [3] J. Nordwood *Mecánica clásica a nivel intermedio*, Prentice Hall International (1981).
- [4] A.P. Arya *Introduction to classical mechanics*, Allyn and Bacon (1990).
- [5] José-Philippe Pérez *Mécanique. Points matériels, solides, fluides*. Masson (1995).
- [6] L. Landau, A. Ajeizer y E. Lifshitz *Curso de Física General: Mecánica y Física Molecular*, Editorial Mir (1988).
- [7] R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands *The Feynman lectures on Physics*, Vol. II, Fondo Educativo Interamericano (1976).

Problemas de Física I

Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

• **Problema 1:** Sean los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ con origen en $A(1, -3, 0)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ con origen en $B(3, 2, 2)$. Calcular:

- (A) Módulos de \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- (B) Cosenos directores de \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- (C) Angulo formado por las direcciones de \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- (D) Un vector perpendicular a \mathbf{a} de módulo 3, situado en el plano (X, Y) .
- (E) El vector \mathbf{c} , paralelo al eje Z , que tiene respectivamente su origen y su extremo en las rectas definidas por \mathbf{a} y \mathbf{b} .

• **Problema 2:**

Dados los vectores, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $A(1, 1, 1)$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $B(0, 1, 0)$, hallar:

- (A) Un vector perpendicular a \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de módulo 5.
- (B) El vector proyección de \mathbf{r}_1 sobre un vector perpendicular al \mathbf{r}_2 y contenidos en el plano definido por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , considerados como libres.
- (C) Un vector perpendicular a la bisectriz de las direcciones de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en el plano de éstos.
- (D) Momento de \mathbf{r}_1 respecto al punto B .
- (E) Momento axial de \mathbf{r}_1 respecto a la recta de acción de \mathbf{r}_2 .

• **Problema 3:** Dado el sistema de vectores ligados,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; \quad A(0, 1, 0)$$

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad B(1, 0, 1)$$

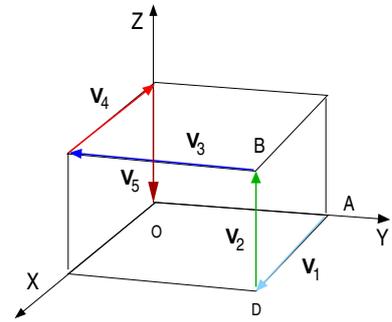
$$\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}; \quad C(2, 1, 1)$$

calcular:

- (A) La resultante \mathbf{R} del sistema.
- (B) Momento del sistema respecto al origen.
- (C) El producto $M_A \cdot \mathbf{R}$.
- (D) Un punto del eje central y su dirección.
- (E) Momento axial del sistema respecto al eje central.

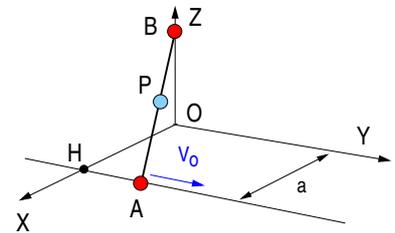
• **Problema 4:** Para el sistema de cinco vectores de la figura, todos de módulo unidad, calcular:

- (A) Resultante.
- (B) Momento mínimo.
- (C) Momento axial respecto al eje \overline{AB} .
- (D) Coordenadas de un punto del eje central.
- (E) Coordenadas de un punto del plano ABD en el que el momento del sistema sea paralelo a la resultante.



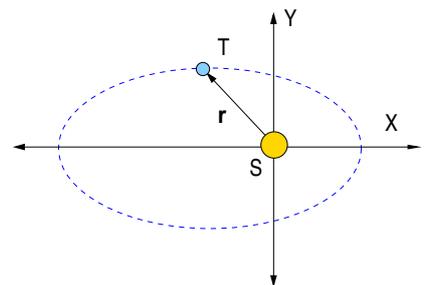
• **Problema 5:** Una varilla AB de longitud $2a$ se mueve de forma que su extremo B describe el eje OZ y el A una paralela al eje OY . Sabiendo que el punto A parte de H y describe la recta con velocidad constante v_0 , se pide:

- (A) Vector de posición del punto P (medio de AB) en función del tiempo.
- (B) Radio de curvatura de la trayectoria de P en un instante cualquiera.
- (C) Demostrar que la trayectoria de P es plana.
- (D) Apoyándose en (B) y (C) comprobar que la trayectoria es un arco de circunferencia de centro un punto del eje OX cuyas coordenadas se piden.
- (E) Vector velocidad angular con que el punto P describe su trayectoria.



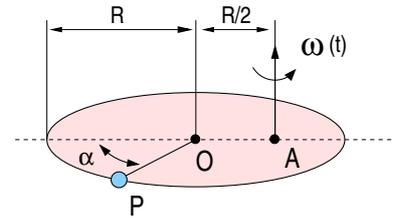
• **Problema 6:** El vector de posición de la Tierra en los ejes de la figura, con centro en el Sol y el plano XY en la eclíptica, es $\mathbf{r} = (\cos \theta - e) \mathbf{i} + (\sqrt{1 - e^2} \sin \theta) \mathbf{j}$, estando relacionado el parámetro θ con el tiempo t por la ley $t = (\theta - e \sin \theta) / 2\pi$ ($e = 0,016$ es la excentricidad de la órbita). Se pide:

- (A) Velocidad máxima y mínima.
- (B) Momento de la velocidad respecto al origen de coordenadas en un instante cualquiera.
- (C) Comprobar que la aceleración tiene la misma dirección de \mathbf{r} .
- (D) Radios de curvatura máximo y mínimo.



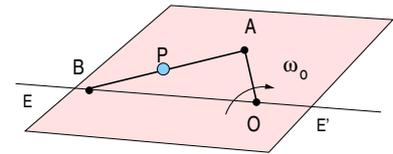
Nota: El tiempo t viene dado en años terrestres y las distancias en unidades astronómicas (A.U. = 1.5×10^8 Km).

• **Problema 7:** Una plataforma circular, de radio R , gira con velocidad angular $\omega(t)$, variable con el tiempo, alrededor de un eje perpendicular a él (excéntrico) que pasa por un punto A separado una distancia $R/2$ del centro O del disco. Una partícula P se mueve por la periferia de la plataforma de modo que el ángulo $\alpha(t)$ (que forman las rectas OP y OA) varía con el tiempo. Se pide:



- (A) Calcular la velocidad y la aceleración de P respecto de ejes fijos. (Se darán sus componentes según la recta AO y una perpendicular a ella).
- (B) En el caso particular en que $d\alpha/dt = -\omega$, calcular el radio de curvatura de la trayectoria. ¿Cómo es el movimiento?.

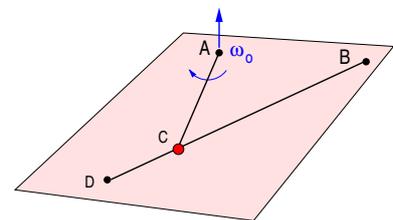
• **Problema 8:** Una varilla OA , de longitud L , gira alrededor de un eje fijo que pasa por O con velocidad angular constante ω_o . Articulada en A hay una barra de longitud $3L$ cuyo extremo B desliza sobre el eje fijo EE' .



Un punto P se mueve sobre AB con velocidad constante relativa a la barra. Se sabe que cuando P se encuentre en el punto medio de AB la varilla OA es perpendicular a EE' . En ese instante, se pide:

- (A) Velocidad angular de la barra.
- (B) Aceleración de P .

• **Problema 9:** Dos varillas AC y BD se encuentran en un plano horizontal y pueden girar alrededor de dos ejes verticales situados en los puntos fijos A y B , de forma que el extremo C (de AC) está siempre situado en la varilla BD .

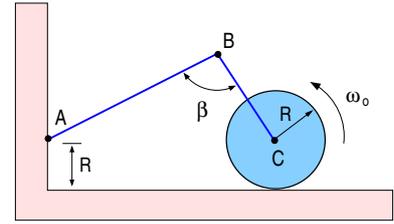


Se sabe que la varilla AC gira con velocidad angular constante ω_o (en el sentido de la figura) y que $|\overline{AC}| = r$. En el instante en que $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ y sabiendo que en ese instante $\widehat{BAC} = \alpha$, se pide:

- (A) Velocidad de C respecto de unos ejes unidos a BD .
- (B) Velocidad angular de la varilla BD .
- (C) Aceleración de C respecto a unos ejes unidos a BD .
- (D) Aceleración angular de la varilla BD .

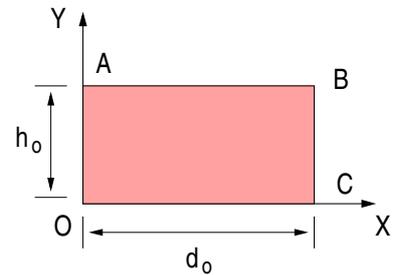
- **Problema 10:** El sistema de la figura está formado por un disco de centro C y radio R y dos varillas AB y BC de longitudes $2L$ y L respectivamente articuladas en B y que pueden girar libremente alrededor de A y C .

El disco rueda con velocidad angular constante ω_o alrededor de C en dirección al origen y se mueve en el plano del dibujo. Se piden las velocidades y aceleraciones angulares de las varillas cuando el ángulo que forman vale $\beta = 90^\circ$.



- **Problema 11:** Desde el punto A , situado en una elevación de anchura d_o y altura h_o sobre el suelo, se dispara un proyectil con velocidad v_o . Calcular:

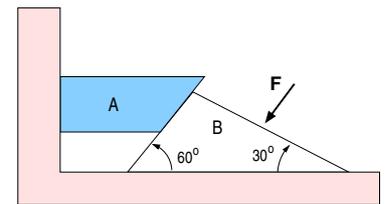
- (A) El máximo valor de d_o para que el proyectil llegue al suelo OC .
- (B) Para $d_o < d_{\max}$, mínima distancia al punto C .



- **Problema 12:** Dos bloques A y B , de igual masa M , pueden deslizar sin rozamiento uno sobre el otro y A sobre la pared. Aplicando una fuerza,

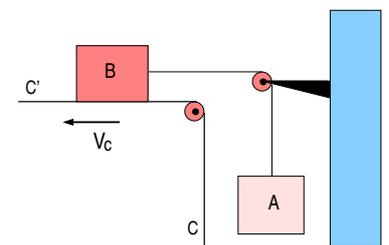
$$F = \frac{\sqrt{3}}{6} Mg$$

al bloque B como se indica en la figura, sabiendo que entre B y el suelo existe un coeficiente de rozamiento $\mu = 1/\sqrt{3}$ y que el sistema parte del reposo, se pide:



- (A) Aceleraciones de A y B .
- (B) Reacción de la pared sobre A .

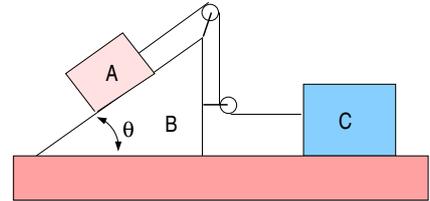
- **Problema 13:** Por una polea P pasa sin rozamiento un cable inextensible y sin masa, que une un bloque A de masa M_a a un bloque B sobre una cinta transportadora CC' (de coeficiente de rozamiento μ) que avanza con velocidad V_c en el sentido indicado.



- (A) Con V_c constante se observa que B está en reposo respecto a la cinta. Hallar:
 - (1) Mínimo valor de la masa de B , M_{\min} , para que esto sea posible.
 - (2) Reacción de la polea sobre el cable.

(B) Supuesto que $M_B = 2M_{\min}$, y tomando como condiciones iniciales el movimiento en (A), se comunica externamente una aceleración constante dV_c/dt a la cinta, en la dirección V_c . Hallar la condición que ha de satisfacer dV_c/dt para que B deslice respecto de la cinta.

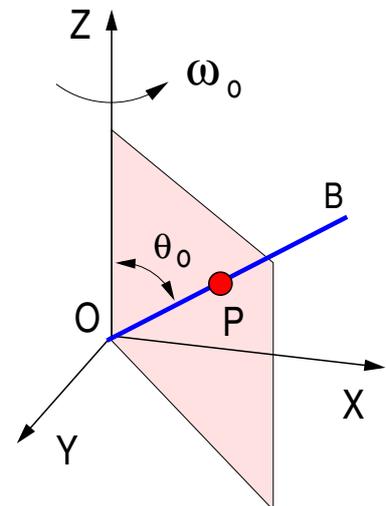
- **Problema 14:** En el sistema de la figura formado por los bloques A , B y C de masas $M_A = m$, $M_B = m \cos \theta$, $M_C = m$, sólo existe rozamiento (coeficiente μ) entre el suelo y el bloque C . Se pide, sabiendo que el sistema parte del reposo:



- (A) Mínimo valor de μ (μ_{\min}) para que C no deslice sobre el suelo.
- (B) Aceleración de B y fuerza de rozamiento si $\mu = \frac{1}{2}\mu_{\min}$.

- **Problema 15:** Por una varilla OB puede deslizarse sin rozamiento un abalorio P de masa m . La varilla se hace girar con velocidad angular constante $\omega_o = \omega_o \mathbf{k}$ alrededor del eje vertical Z fijo, siendo el ángulo entre el eje y la varilla $\theta_o = 30^\circ$ (ver figura).

Inicialmente el abalorio se encuentra en O y se le comunica una velocidad $V_o = \sqrt{3}g/\omega_o$ respecto de la varilla. Si r es la distancia del abalorio al punto O se pide:

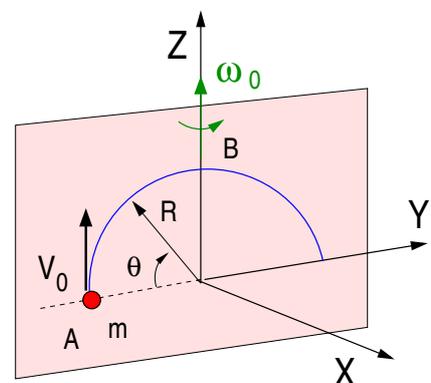


- (A) Velocidad del abalorio respecto de la varilla en función de r .
- (B) Máximo valor de r .
- (C) Reacción de la varilla sobre el abalorio en función de r .

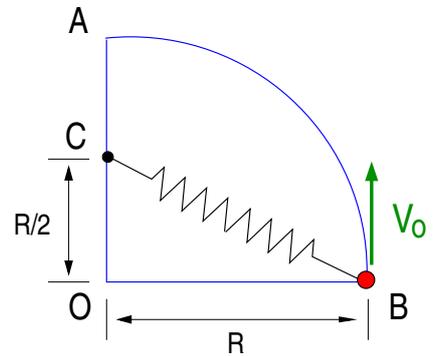
- **Problema 16:** Un abalorio de masa m puede deslizarse sin rozamiento por un alambre circular de radio R (ver figura). El alambre, situado en un plano vertical se hace girar alrededor del eje fijo Z con velocidad angular constante $\omega_o = \omega_o \mathbf{k}$.

Si el abalorio parte de A con velocidad $V_o = 2\sqrt{gR}$ respecto del alambre, se pide:

- (A) Máximo valor de ω_o para que el abalorio llegue a B .
- (B) Para $\omega_o = \sqrt{6g/R}$, (1) la máxima altura alcanzada (θ_{\max}) y (2) la reacción del alambre sobre el abalorio cuando pasa por A .



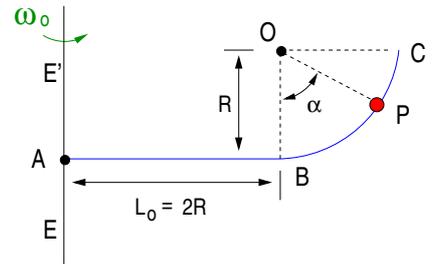
• **Problema 17:** Por un alambre AB en forma de cuarto de circunferencia de radio R desliza sin rozamiento una masa m atraída por un muelle de constante K y longitud natural $R/2$ fijo en C .



(A) Suponiendo la figura en un plano vertical y que la masa sale de B con velocidad v_o paralela a OA , hallar la velocidad en A .

(B) Si la figura esta en un plano horizontal y gira alrededor de un eje vertical que pasa por O con velocidad angular $\omega = K_1 t$ en sentido contrario a las agujas del reloj, hallar la velocidad relativa al alambre de la masa m en A , suponiendo que parte de B con velocidad v_o en la dirección OA .

• **Problema 18:** Por un alambre ABC de masa despreciable puede deslizar sin rozamiento un abalorio de masa m . El alambre, situado en un plano vertical, se hace girar alrededor de un eje fijo EE' vertical con velocidad angular constante ω_o . Suponiendo que $4g > 9\omega_o^2 L_o$ se pide:

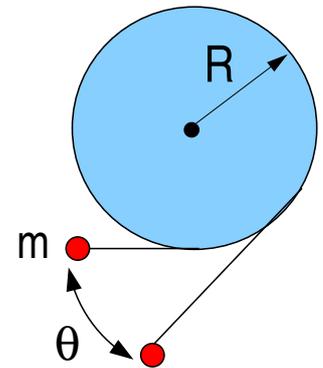


(A) Mínima velocidad respecto del alambre con que se ha de soltar en A el abalorio para que llegue a C .

(B) Aceleración de m respecto al alambre cuando se encuentre en el punto P .

• **Problema 19:** En el contorno de un disco fijo de radio R , situado en un plano vertical, está enrollado un hilo inextensible y sin masa, en cuyo extremo libre existe una partícula de masa m .

Inicialmente se tiene una longitud R del hilo desenrollada y en posición horizontal ($\theta = 0$ en la figura). Se abandona sin velocidad inicial la partícula y se pide:



(A) Vector velocidad en función de θ .

(B) Ecuación que da el máximo valor de θ .

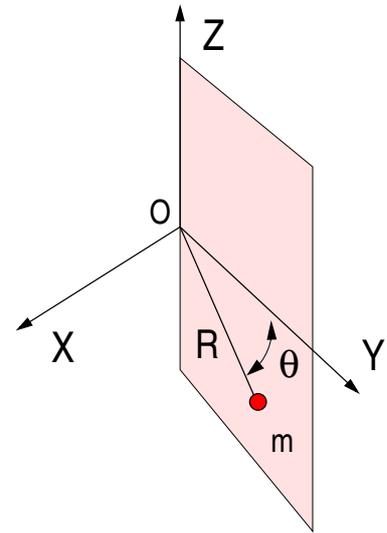
(C) Tensión del hilo en función de θ .

- **Problema 20:** Una partícula de masa m está unida a un punto fijo O por un hilo ideal, sin masa, de longitud R . Inicialmente la partícula está en el plano YZ con $\theta = 30^\circ$ y $\mathbf{V} = -V_0 \mathbf{i}$. Calcular:

(A) Máximo valor de V_0 (V_{\max}) para que la partícula no descienda inicialmente.

(B) Para $V_0 = V_{\max}/\sqrt{3}$:

- (1) Posición más baja alcanzada por la partícula.
- (2) Velocidad en esa posición.

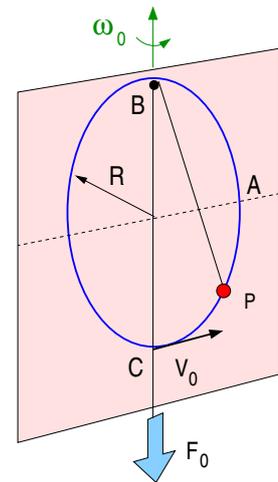


- **Problema 21:** Una partícula P de masa m está ensartada en un aro de radio R situado en un plano vertical por el que puede deslizarse sin rozamiento. La partícula está unida a un hilo ideal en cuyo extremo está aplicada una fuerza $F_0 = mg/4$ y pasa por una polea B también ideal.

El aro gira alrededor del eje BC fijo con velocidad angular $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ constante. Sabiendo que la partícula parte de C con una velocidad relativa al aro V_0 desconocida se pide:

(A) Valor mínimo de V_0 ($V_{0,\min}$) para que la partícula llegue al punto A .

(B) Para $V_0 = V_{0,\min}$ las reacciones del aro sobre la partícula en A y C .



- **Problema 22:** Calcular:

(A) Distancia a la Tierra de un satélite artificial de órbita circular que permanece estacionario observando desde Tierra (satélite geostacionario).

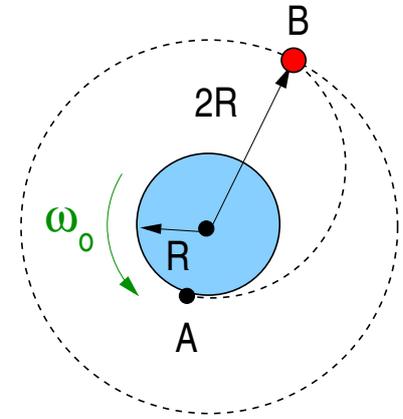
(B) Período de un satélite artificial de órbita circular de radio igual al radio de la Tierra (satélite rasante).

(C) Distancia de la Luna a la Tierra.

DATOS: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6,400 \text{ Km}$, período de la Luna = 28 días.

- **Problema 23:** Se quiere poner un satélite en una órbita circular, de radio $2R$ alrededor de la Tierra, en el plano ecuatorial, siendo R el radio de la Tierra.

Para ello se lanza el satélite desde la Tierra con una velocidad v'_0 (desconocida) relativa a ella y tangente a la Tierra y tal que el apogeo B (máxima distancia al centro de la Tierra) de la órbita elíptica coincida con el radio de la órbita circular. Cuando el satélite llegue a B se le da un Δarv instantáneo, tangente a su trayectoria de forma que el satélite quede en la órbita circular. Se pide:



- (A) Valor de v'_0 .
- (B) Tiempo que tarda en recorrer el arco AB .
- (C) Valor de Δarv .

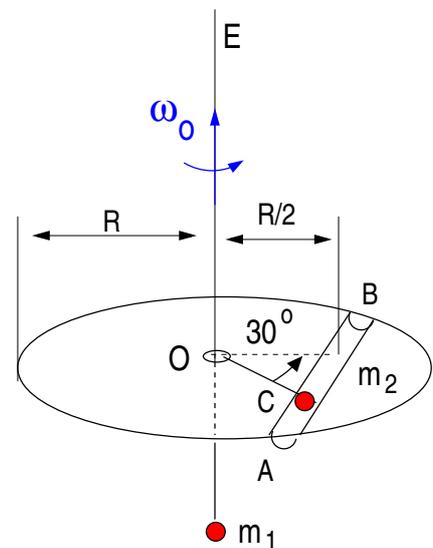
NOTA: Se desprecia la traslación del centro de la Tierra; ω_0 es la velocidad de giro de la Tierra alrededor de su eje.

- **Problema 24:** En una plataforma horizontal de radio R , como la que se indica en la figura, que gira alrededor de un eje vertical E con velocidad angular constante ω_0 , existe un canal recto AB , que dista $R/2$ del centro de la plataforma, por el que puede deslizarse sin rozamiento una partícula de masa $m_2 = m$.

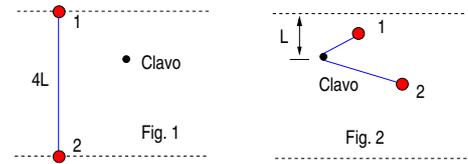
Esta partícula se encuentra unida a otra de masa $m_1 = 4m$ por un hilo ideal de longitud $2R$ que pasa, sin rozamiento, a través de un pequeño orificio existente en O .

Sabiendo que en el instante inicial la partícula m_2 parte del punto A con velocidad nula respecto al canal, se pide:

- (A) Velocidad de m_1 cuando m_2 alcanza el punto C de la figura.
- (B) Máximo valor de ω_0 para que m_2 alcance el punto C .

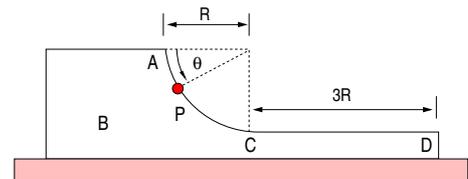


• **Problema 25:** Dos partículas 1 y 2 de igual masa m están unidas por un hilo inextensible y sin masa de longitud $4L$. Inicialmente ambas masas se desplazan sobre un plano horizontal sin rozamiento con la misma velocidad v_o según dos rectas paralelas distanciadas entre sí $4L$ (ver figura 1). El punto del hilo que se encuentra a la distancia L de 1, encuentra un clavo que sobresale del suelo, no existiendo rozamiento entre el hilo y el clavo. Se pide:



- (A) Componente de la velocidad según el hilo, de la partícula 1, en función de su distancia r al clavo (figura 2).
- (B) Valor de r para que esa componente sea máxima.
- (C) Tensión del hilo en función de r .

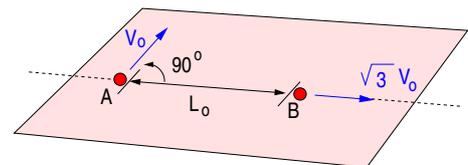
• **Problema 26:** Un bloque B de masa M se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento como se indica en la figura. En el punto A de la figura se suelta una partícula P de igual masa M sin velocidad inicial. Sabiendo que entre la partícula y el bloque no existe rozamiento, se pide:



- (A) Velocidad del bloque en función del ángulo θ .
- (B) Espacio recorrido por el bloque cuando la partícula pasa por C .
- (C) Trabajo realizado sobre el bloque por la partícula hasta el instante en que pasa por D .

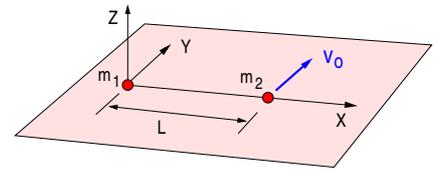
• **Problema 27:** Dos partículas iguales A y B , de masa m , que se pueden mover sin rozamiento sobre un plano horizontal, se atraen con una fuerza proporcional a su distancia (constante de proporcionalidad K).

En el instante inicial, las partículas están separadas una distancia L_o y se mueven con unas velocidades v_o y $\sqrt{3}v_o$, respectivamente, como indica la figura. Sabiendo que $KL_o^2/mv_o^2 = 2$, hallar:



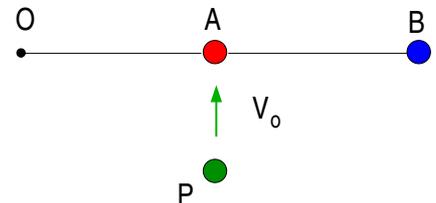
- (A) Velocidad del CM, en unos ejes fijos, en un instante genérico.
- (B) Distancia mínima entre las partículas.

- Problema 28:** Sobre una mesa horizontal (el plano (X, Y) de la figura) hay dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un hilo ideal de longitud L . En el instante inicial m_1 está en reposo y m_2 tiene velocidad $\mathbf{V}_2 = v_o \mathbf{j}$. Despreciando el rozamiento calcular:



- (A) La velocidad del CM.
- (B) La tensión del hilo.
- (C) La posición de m_2 en el instante en que la velocidad vuelve a tener la misma dirección y sentido que $\mathbf{V}_2 = v_o \mathbf{j}$.

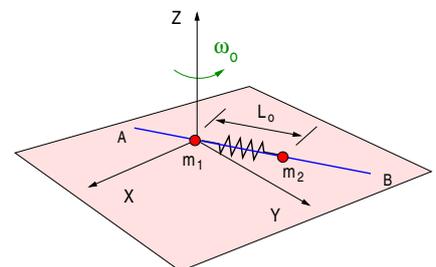
- Problema 29:** Sobre un plano horizontal pueden deslizarse sin rozamiento dos partículas A y B de masas $2m$ y m respectivamente. La partícula A está unida por dos hilos sin masa e inextensibles de igual longitud L a un punto fijo O y a la partícula B .



En el instante inicial de la figura las partículas están en reposo y alineadas con O . Otra partícula P de masa m choca con la partícula A con velocidad v_o perpendicular a los hilos. Se sabe que el choque es perfectamente elástico. En el instante en que los hilos OA y AB son perpendiculares se pide:

- (A) La velocidad de las partículas.
- (B) La tensión de los hilos.

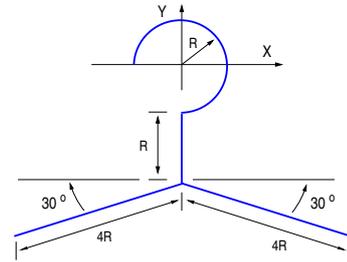
- Problema 30:** En una varilla horizontal AB hay dos abalorios de masas m_1 y m_2 unidos por un muelle de constante K y longitud natural despreciable. La varilla gira alrededor del eje vertical Z con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega_o \mathbf{k}$.



No existe rozamiento e inicialmente los abalorios se encuentran fijos a la varilla mediante topes en la posición de la figura. Se retiran los topes y para el movimiento de los abalorios se pide,

- (A) La velocidad del CM del sistema en función de su distancia al origen.
- (B) Mínimo valor de Ω_o para que m_2 se aleje del eje Z en el instante inicial.
- (C) Mínimo valor de Ω_o para que la distancia entre los abalorios aumente con el tiempo.

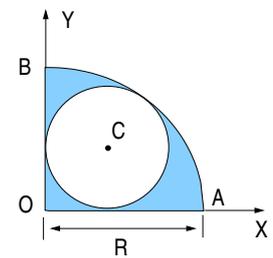
- **Problema 31:** Calcular el CM de la varilla homogénea de densidad lineal λ la figura adjunta en los ejes indicados.



- **Problema 32:** Hallar:

(A) En los ejes de la figura, el CM del sólido compuesto por una lámina OBA (cuarto de círculo de radio R) de densidad superficial uniforme σ , en el que se ha practicado el orificio circular C de la figura.

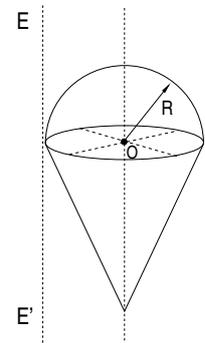
(B) El momento de inercia del sólido respecto al eje Z .



- **Problema 33:** Para el sólido homogéneo formado por una semiesfera de radio R y un cono de igual radio en la base y altura $2R$, unidos por sus bases, se pide calcular:

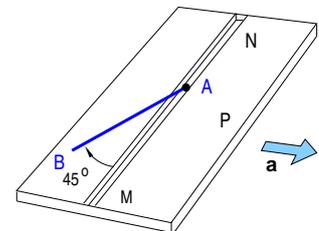
(A) La posición de su centro de masas.

(B) Momento de inercia respecto del eje EE' paralelo al eje del cono a una distancia R .



- **Problema 34:** Sobre una plataforma horizontal P , a la que se hace mover con una aceleración constante \mathbf{a} como indica la figura, puede deslizarse sin rozamiento una barra homogénea AB , de longitud L y masa M , cuyo extremo A puede deslizarse sin rozamiento por un carril MN perpendicular a \mathbf{a} .

Se sabe que inicialmente la barra está en reposo respecto de la plataforma como indica la figura. Cuando la barra se encuentra en la dirección de \mathbf{a} se pide:

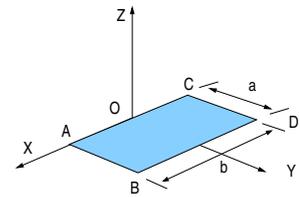


(A) La velocidad del CM de la barra relativa a la plataforma.

(B) La velocidad angular de la barra.

- **Problema 35:** Una placa rectangular homogénea $ABCD$ de masa m se mueve sin rozamiento sobre el plano XY por la acción de un par de momento constante $\mathbf{M}_o = M_o \mathbf{k}$.

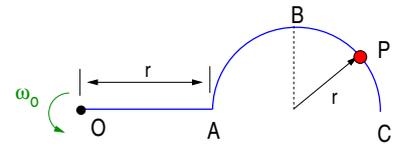
Sabiendo que la posición inicial es la de la figura y que en dicho instante $\mathbf{V}_{CM} = V_o \mathbf{j}$ y $\boldsymbol{\omega} = -\omega_o \mathbf{k}$ se pide:



(A) El ángulo que forma AC con el eje X en el instante en que el sólido no gira.

(B) La velocidad de A cuando la placa giró 90° .

- **Problema 36:** Sobre un plano horizontal se apoya sin rozamiento un alambre $OABC$ que consta de un trozo recto OA de densidad $3\pi\lambda$ y otro semicircular ABC de densidad λ . Por el alambre puede deslizarse sin rozamiento un abalorio P de dimensiones despreciables y masa $\pi\lambda r$. A su vez, el alambre puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo que pasa por O .



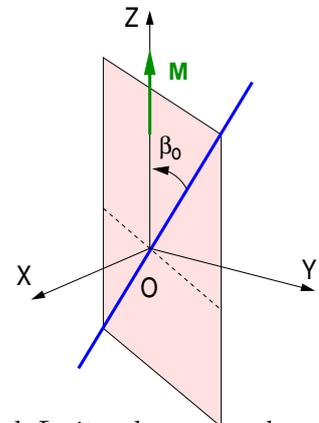
En el instante inicial en que el abalorio se encuentra en la posición B se comunica al alambre una velocidad ω_o (ver figura) y se pide:

(A) La velocidad angular del alambre cuando el abalorio P sale por el extremo C .

(B) La velocidad relativa al alambre del abalorio en dicho instante.

- **Problema 37:** Una varilla homogénea de masa M y longitud $2L$ puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su punto medio O también fijo.

La varilla esta forzada a formar un ángulo β_o con el eje Z y sobre ella actúa un momento vertical $\mathbf{M} = M_o \cos(\nu_o t) \mathbf{k}$ en donde M_o y ν_o son constantes Partiendo del reposo en $t = 0$ calcular:



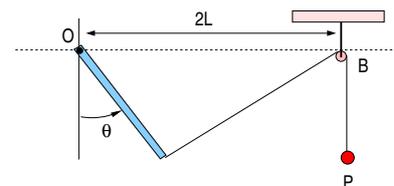
(A) La velocidad angular $\omega(t)$ de la varilla en función del tiempo.

(B) Las reacciones en O .

(C) El ángulo girado por la varilla cuando la energía cinética E_c sea máxima.

- **Problema 38:** Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L situada en un plano vertical puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al plano y que pasa por O .

El extremo A de la varilla está unido a una partícula P de masa m por medio de un hilo ideal ABP de longitud $3L$ que pasa por la polea ideal B . Inicialmente el sistema está en reposo y $\theta = 0$. Se pide en el instante en que $\theta = 90^\circ$:

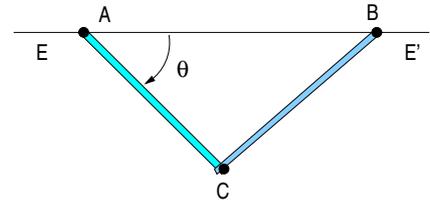


(A) La tensión del hilo.

(B) Las reacciones en O .

(C) La velocidad y aceleración angular de la varilla.

- **Problema 39:** Dos varillas homogéneas AC y BC de longitud L y masas $2m$ y m respectivamente, están articuladas en C y situadas en un plano vertical. La varilla AC puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al plano, fijo en A , y el extremo B desliza sin rozamiento por una guía horizontal EE' .



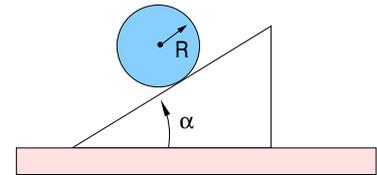
Inicialmente las varillas se abandonan con velocidad nula y $\theta = 0$. Se pide en el instante en que $\theta = 30^\circ$:

- Las velocidades y aceleraciones angulares de las varillas.
- Las reacciones en A y B .

- **Problema 40:** Un disco homogéneo de masa m y radio R puede rodar sobre el bloque de la figura de masa $2m$ que a su vez puede deslizar sobre el suelo. Sólo existe rozamiento entre el disco y el bloque con coeficiente μ .

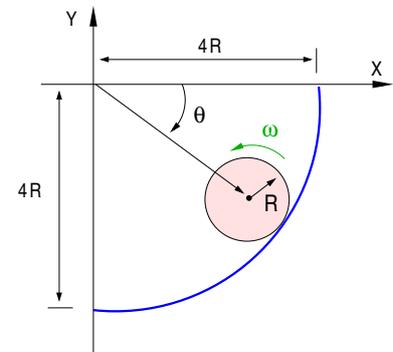
Inicialmente el disco y el bloque se encuentran en reposo y para el movimiento subsiguiente se pide:

- Valor mínimo del coeficiente de rozamiento μ_{min} para que el disco ruede.
- Para $\mu > \mu_{min}$, la aceleración del bloque y la reacción del suelo sobre el bloque.



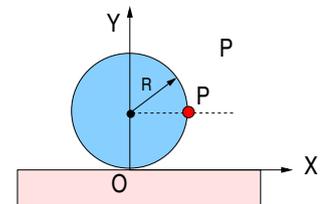
- **Problema 41:** Un disco homogéneo de radio R y masa M situado en un plano vertical rueda con velocidad angular ω sobre una superficie circular de radio $4R$. El disco parte del reposo en $\theta = 30^\circ$. Respecto del triedo de la figura, se pide:

- Vectores de posición y velocidad del CM del disco.
- Relación entre ω y $\dot{\theta}$.
- Energía cinética del disco en función de $\dot{\theta}$.
- $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en función del ángulo θ .



- **Problema 42:** Apoyado sobre un suelo horizontal el sistema de la figura está formado por un disco homogéneo vertical de radio R y masa m y por una partícula P de masa $m/2$ unida al disco. Si en la posición de la figura el sistema empieza a rodar partiendo del reposo, se pide:

- Posición inicial del centro de masas y momento de inercia I_{CM} respecto a un eje paralelo a OZ que pasa por el CM.
- Aceleración angular del sistema y la fuerza de rozamiento iniciales.
- Valor mínimo del coeficiente de rozamiento con el plano para que se dé la rodadura.

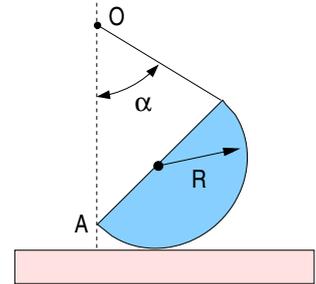


• **Problema 43:** Una placa homogénea semicircular de radio R se encuentra sujeta por un hilo de longitud $2R$ a un punto fijo O que está en la vertical del punto A y de tal forma que en la posición de la figura se encuentra en equilibrio.

Sabiendo que existe rozamiento entre la placa y el suelo y que $\alpha = 60^\circ$ se pide:

(A) El valor mínimo de μ (μ_{min}) para que haya equilibrio en la posición indicada.

(B) En el instante en que se corta el hilo para μ_{min} , ¿rueda o desliza?.



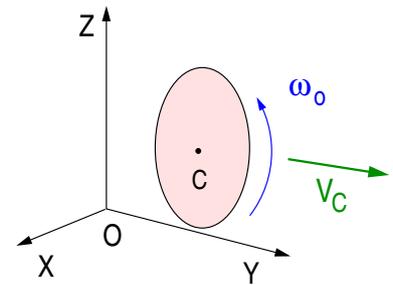
• **Problema 44:** Un disco homogéneo de masa m y radio R sometido a un par de fuerzas de momento $\mathbf{M}_o = -M_o \mathbf{i}$ se mueve sobre un plano horizontal con rozamiento μ .

Sabiendo que inicialmente la velocidad del centro de masas es \mathbf{V}_C y la velocidad angular ω_o (ver figura) se pide:

(A) Determinar el movimiento en el instante inicial (¿Rueda o desliza?).

(B) ¿En qué instante ($t = t_1$) puede cambiar el movimiento de régimen y qué relación ha de cumplirse entre M_o y μ para que esto suceda?.

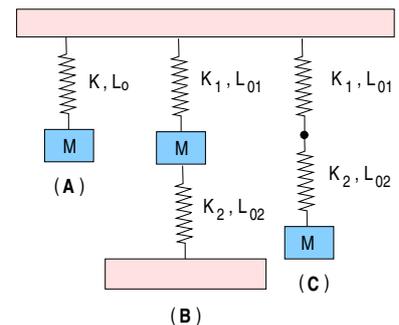
(C) Si no se cumple la relación entre M_o y μ de (B). ¿Cómo es el movimiento del disco y cómo la dirección de la fuerza de rozamiento respecto de lo que se obtuvo en el apartado (A)?.



• **Problema 45:** Dadas las tres configuraciones (A), (B), y (C) de la figura, sabiendo que la masa del bloque es M y que las constantes y las longitudes naturales de los muelles están indicadas en la figura, hallar:

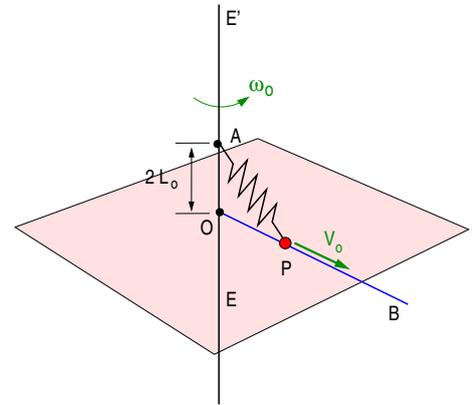
(A) Frecuencia de las oscilaciones en los tres casos de la figura.

(B) Máxima y mínima longitud del muelle en el caso (A), sabiendo que el movimiento comienza soltando la masa en el instante en que el muelle tiene el doble de su longitud natural.



- **Problema 46:** Alrededor de un eje vertical EE' gira la varilla OB perpendicular al mismo con velocidad angular constante ω_o . Por la varilla puede deslizarse sin rozamiento una partícula P de masa m unida a un punto A (distancia $|OA| = 2L_o$) por un muelle ideal de longitud natural despreciable y constante K

En el instante inicial la distancia $|OP| = L_o$ y la velocidad de la partícula respecto de la varilla es $V_o = L_o\omega_o$ (ver figura). Se pide:

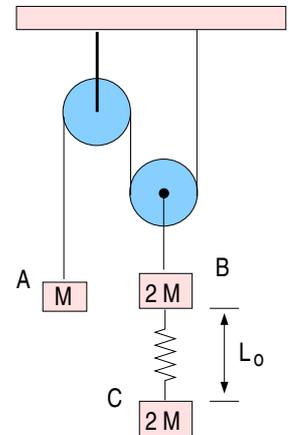


(A) Valor mínimo de K para que el movimiento respecto de la varilla sea armónico.

(B) Tomando $K = 2m\omega_o^2$ hallar:

- (1) La máxima distancia $|OP|$
- (2) La distancia $|OP|$ y la reacción de la varilla en el instante $t = \pi/12\omega_o$.

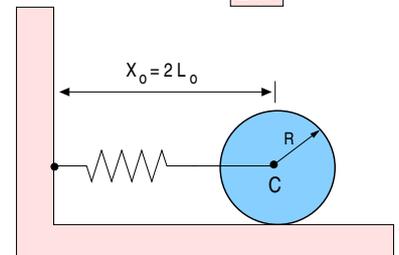
- **Problema 47:** Tres bloques A , B y C de masas M , $2M$ y $2M$ respectivamente están unidos por hilos y poleas ideales tal como indica la figura. Entre B y C hay un muelle de longitud natural L_o y constante elástica K . En el instante inicial el muelle tiene su longitud natural y los bloques están en reposo. Se pide:



(A) La longitud máxima del muelle.

(B) La tensión del hilo en dicho instante.

- **Problema 48:** Un disco homogéneo de masa M y radio R tiene su CM unido a una pared mediante un muelle de constante K y longitud natural L_o . El coeficiente de rozamiento entre el disco y el suelo es μ e inicialmente el disco está en reposo en la posición que se indica en la figura siendo $x_o = 2L_o$. Se pide:



(A) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento μ_{min} para que el disco ruede inicialmente.

(B) Determinar si posteriormente al instante inicial el disco rueda o desliza.

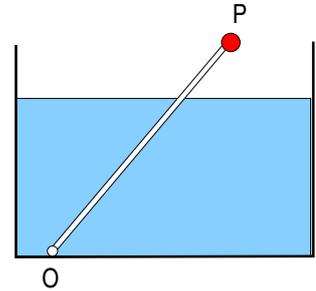
(C) Suponiendo que $\mu > \mu_{min}$ el valor de la fuerza de rozamiento en función del tiempo

• **Problema 49:** Una barra uniforme de 1,2 Kg de peso, 60 cm de longitud y densidad relativa 0,5 puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su extremo O en el fondo de un depósito con agua. Se pide:

(A) El peso P que ha de colocarse en su extremo superior para que en el equilibrio queden sumergidos 50 cm de barra.

(B) Reacción en el eje de giro.

(C) Cuando el depósito contiene 15 cm de agua y 10 cm de aceite de densidad relativa 0,9, ¿cuál es la longitud de la varilla sumergida en el agua?



• **Problema 50:** Una compuerta está formada por media superficie cilíndrica de radio R y longitud L de densidad σ por unidad de área. Dicha compuerta está articulada en un eje horizontal EE'

(A) Calcular la altura H de agua en el depósito para que exista equilibrio en la posición de la figura.

(B) Calcular la reacción en el eje.

