

# Cálculo vectorial y operadores diferenciales

Luis Conde  
Departamento de Física Aplicada  
E.T.S. Ingeniería Aeronáutica y del Espacio  
Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

En estas notas desarrollan mis clases de introducción al electromagnetismo de la asignatura Física II del Primer Curso de la ETSIAE y no sustituyen los excelentes textos citados en la Bibliografía. Han sido redactadas para el grupo M2 donde imparto clase en el curso 2023-2024 y serán mejoradas a lo largo del curso. Su propósito es servir de resumen y guía de lectura para abordar la resolución de los problemas y también como ayuda al estudio, complementando el libro de los apuntes oficiales de la asignatura.

## Índice

<b>1. Vectores, integrales y operadores diferenciales</b>	<b>1</b>
1.1. Operadores diferenciales. . . . .	2
1.2. Curvas y superficies. Convenio de signos . . . . .	6
1.3. Integrales de funciones vectoriales . . . . .	7
1.3.1. Integral de línea . . . . .	7
1.3.2. Flujo de un campo vectorial . . . . .	10
1.4. El vector densidad de corriente . . . . .	11
<b>2. Teoremas integrales.</b>	<b>14</b>
2.1. Teorema de la divergencia o de Gauss . . . . .	14
2.2. Teorema de Stokes . . . . .	15
2.2.1. Campos conservativos . . . . .	18
<b>Referencias</b>	<b>20</b>



# 1. Vectores, integrales y operadores diferenciales

En estas notas indicaremos las magnitudes vectoriales en negrita  $\mathbf{A}$  y su módulo  $|\mathbf{A}| = A$  como una letra normal o el vector entre barras verticales. También en muchos textos –especialmente en las fórmulas manuscritas– se escribe  $\vec{A}$  en lugar de  $\mathbf{A}$ , también  $|\vec{A}| = A$ , ambas notaciones son *totalmente equivalentes*.

Los vectores quedan determinados por sus tres componentes respecto de un *sistemas coordenados* o *triedro* que puede tener diferentes geometrías. La razón es que se encuentran ecuaciones más sencillas cuando el sistema de coordenadas respeta la simetría del problema. Los mas comunes se muestran en las figuras 1 y 2 para el vector de posición  $\mathbf{r}$  de un punto  $P$  en el espacio.

En la figura 1a el vector  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  en las usuales coordenadas cartesianas rectangulares está determinado por sus proyecciones a lo largo de tres ejes ortogonales. Cuando el problema tiene geometría axial, suele ser conveniente emplear las *coordenadas cilíndricas* de la figura 1b donde la posición de  $P$  se caracteriza mediante su coordenada  $z$ , la proyección de  $\mathbf{r}$  sobre el plano  $(X, Y)$  y el ángulo  $\varphi$  que forma ésta última con el eje  $X$ , llamado *ángulo azimutal*. La relación entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas es entonces,

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y la posición del punto  $P$  se especifica de nuevo mediante tres cantidades  $(\rho, \varphi, z)$ . Las superficies con  $\rho = \text{cte.}$  son cilindros concéntricos cuyo eje de simetría es la dirección del versor  $\mathbf{k}$  y para  $z = \text{cte.}$  son planos paralelos al  $(X, Y)$ . Como se muestra en la figura 1b podemos definir los vectores unitarios  $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\varphi)$  a lo largo de la dirección radial y la del ángulo  $\varphi$  como se indica en el esquema,

$$\mathbf{u}_r = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$$

Ambos forman un triedro junto con el vector unitario  $\mathbf{k}$  que se relacionan mediante los productos vectoriales:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\varphi \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi \wedge \mathbf{k} = \mathbf{u}_r \quad , \quad \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{k}$$

Finalmente, podemos encontrarnos con situaciones con simetría esférica donde suele ser aconsejable emplear las *coordenadas polares* o *esféricas* de la figura 2. La posición del punto  $P$  está determinada por la *distancia radial*  $r = |\mathbf{r}|$  al origen  $O$ , el ángulo  $\theta$  que forma  $\mathbf{r}$  con el eje  $Z$  y el  $\varphi$  que

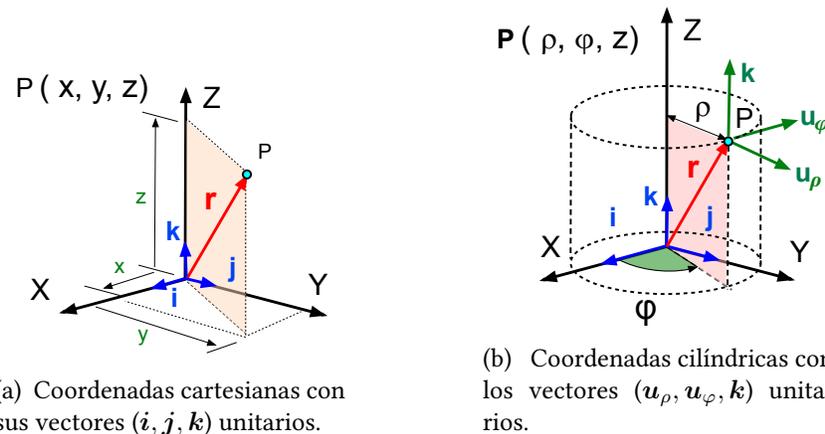


Figura 1: Esquemas del vector de posición  $\mathbf{r}$  de un punto  $P$  en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

forma la proyección de  $\mathbf{r}$  sobre el plano  $(X, Y)$ ,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El ángulo<sup>1</sup>  $\theta$  (*ángulo polar* o *colatitud*) varía entre  $0$  y  $\pi$  de modo que cuando  $\varphi = 0$  el vector  $\mathbf{r}$  es paralelo al versor  $\mathbf{k}$  y para  $\theta = \pi$  apunta en la dirección  $-\mathbf{k}$ . Para el ángulo  $\varphi$  (azimutal) tenemos que  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  de modo que cuando  $\varphi = \pi$  la proyección de  $\mathbf{r}$  en el plano  $(X, Y)$  se encuentra a lo largo de la dirección  $-\mathbf{i}$ .

Fijada la longitud del vector  $\mathbf{r} = r$  su extremo describe un círculo alrededor del eje  $Z$  al variar  $\varphi$  entre  $0$  y  $2\pi$  si el ángulo  $\theta$  es constante. Cuando fijamos  $\varphi$  el punto  $P$  describe un círculo en un plano que contiene al eje  $Z$  como muestra la figura 2. Lo mismo que en los sistemas coordenados cilíndrico y cartesiano podemos definir un triedro formado por los vectores unitarios  $(\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$  a lo largo de cada dirección.

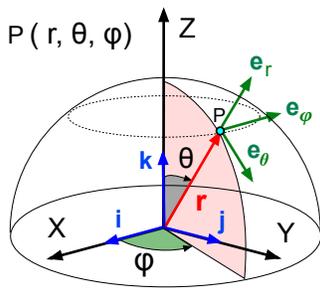


Figura 2: Coordenadas esféricas del punto  $P$ .

Como las superficies con  $|\mathbf{r}|$  constante son esferas con centro en el origen  $O$  las coordenadas esféricas serán prácticas en problemas que tengan simetría alrededor de un punto central, o donde el parámetro fundamental sea la distancia  $r$  del punto al origen de coordenadas.

En las figuras 1 y 2 se ha utilizado el vector de posición  $\mathbf{r}$  de un punto pero las definiciones anteriores son válidas para cualquier otra magnitud vectorial. Por ejemplo, el campo eléctrico creado por una carga puntual aislada sólo tendrá una componente radial  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r) (\mathbf{r}/r)$  en coordenadas polares. El campo magnético producido por una corriente rectilínea a lo largo del eje  $Z$  sólo tiene componente axial  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\theta(r) \mathbf{u}_\theta$  y se expresa más fácilmente en

coordenadas cilíndricas.

## 1.1. Operadores diferenciales.

La derivada respecto del tiempo de un vector  $\mathbf{P}(t) = P_x(t) \mathbf{i} + P_y(t) \mathbf{j} + P_z(t) \mathbf{k}$  que depende del tiempo ha sido introducida en la Mecánica Clásica como,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \delta t) - \mathbf{P}(t)}{\delta t} = \frac{dP_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt} \mathbf{k}$$

<sup>1</sup>Esta denominación de los ángulos está especificada por el ISO standard 80000-2:2019 establecido en 1992. Emplearemos

Si  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{r}_p$  es el vector de posición de un punto material  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}_p/dt$  es el vector velocidad y  $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$  su aceleración. Además se tienen las reglas de derivación<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)) &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\lambda \mathbf{P}(t)) &= \lambda \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{P}(t) \wedge \mathbf{Q}(t)] &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \wedge \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t) \wedge \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  son vectores y  $\lambda$  un escalar constante en el tiempo.

Podemos generalizar estas definiciones pueden para cualquier función vectorial  $Q(s)$  que dependa de un escalar  $s$ , que sería equivalente al tiempo en la Mecánica Clásica. Por ejemplo, en la figura 3a los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$  definen los puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre la superficie  $S$ . La distancia que los separa puede especificarse mediante el vector  $\Delta\mathbf{r}$  o por la distancia  $\Delta s$  medida a lo largo de la curva  $C$  que los une y que se apoya en  $S$ . Tendremos,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}$$

donde  $\mathbf{t}$  es un vector unitario tangente a la superficie  $S$  en el punto  $P_1$ . Si la curva  $C$  de la figura 3a es la trayectoria de un punto material tendremos,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v(t) \mathbf{t}$$

donde  $v(t) = ds/dt$  es el módulo de la velocidad del punto y  $\mathbf{t}$  un vector unitario tangente.

En la Física las funciones pueden ser *escalares* cuando su valor en el punto del espacio  $\mathbf{r}$  es una magnitud escalar  $\phi(\mathbf{r})$  y *vectoriales*  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = P_x(\mathbf{r}) \mathbf{i} + P_y(\mathbf{r}) \mathbf{j} + P_z(\mathbf{r}) \mathbf{k}$  si asigna un vector a dicho punto. A este conjunto de vectores en una región del espacio también se le llama *campo vectorial*.

En el punto  $\mathbf{r}_o = x_o \mathbf{i} + y_o \mathbf{j} + z_o \mathbf{k}$  el cambio de la función escalar  $\phi(\mathbf{r})$  a lo largo de cada una de las tres direcciones del espacio se caracteriza por su *derivada parcial* y como muestra la figura 3b,

$$(\Delta\phi)_x \simeq \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x_o} \Delta x$$

para el eje  $X$ . Sumado las tres contribuciones a lo largo de cada eje en el punto  $\mathbf{r}_o$  tendremos,

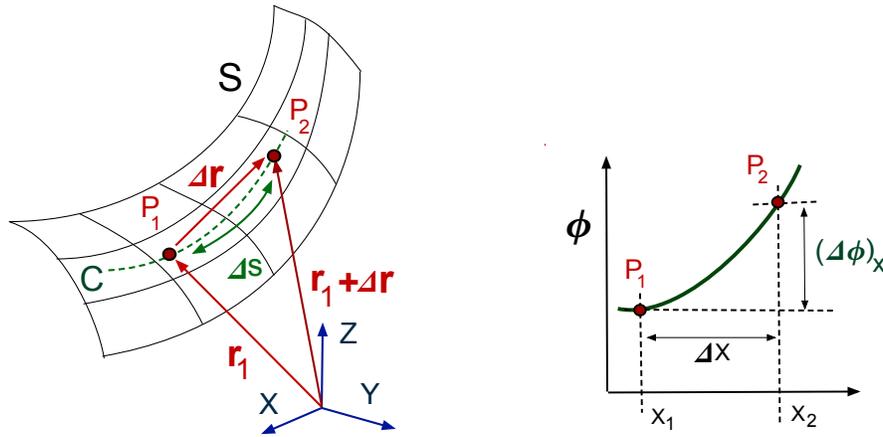
$$\Delta\phi \simeq (\Delta\phi)_x + (\Delta\phi)_y + (\Delta\phi)_z = \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x_o} \Delta x + \left. \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|_{y_o} \Delta y + \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z_o} \Delta z$$

y para el cambio infinitesimal  $d\phi$  entre los puntos  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  podemos escribir,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right] \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

este convenio salvo que se indique lo contrario, aunque también se emplea frecuentemente otra construcción donde los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  están intercambiados.

<sup>2</sup>Pueden comprobarse a partir de la definición.



(a) La curva  $C$  que se apoya en la superficie  $S$  une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  separados una distancia  $\Delta s$ .

(b) Intersección de la función  $z = \phi(x, y)$  con el plano  $(X, Z)$  entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

Figura 3: Esquema del incremento de una función escalar  $z = \phi(x, y)$  que define la superficie  $S$  en tres dimensiones entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  unidos por el vector  $\Delta \mathbf{r}$  y su proyección en el plano  $(X, Z)$ .

El diferencial  $d\phi$  se expresa como el producto escalar de  $d\mathbf{r}$  con del campo vectorial  $\nabla\phi$  que se denomina *gradiente* de dicho campo escalar (también se escribe  $\text{Grad } \phi$ ).

Si en la ecuación  $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$  multiplicamos y dividimos por el módulo  $ds$  tendremos,

$$\boxed{\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{t}} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$  es un vector unitario paralelo a  $d\mathbf{r}$  y entonces tangente a la curva  $\mathbf{r}(s)$ <sup>3</sup>. Por tanto, el cambio  $\Delta\phi$  de la función en un punto dado con la distancia  $\Delta r$  a lo largo de la dirección del vector unitario  $\mathbf{t}$  es el producto escalar  $\nabla\phi \cdot \mathbf{t}$ .

La función escalar  $\phi(\mathbf{r})$  crece más rápidamente en la dirección que apunta su gradiente, como ilustra la figura 4. La función  $z = \phi(x, y)$  toma valores constante  $\phi_1, \phi_2$  y  $\phi_3$  a lo largo de las curvas de la figura 4a donde  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  son los vectores tangente y normal a la superficie en el punto  $P$ . En la figura 4b se indica que el vector  $\nabla\phi$  apunta en la dirección de la máxima variación de la función  $\phi(x, y)$ , que no coincide con la dirección de la tangente en dicho punto. La variación  $d\phi = |\nabla\phi| \cos\theta$  será máxima cuando  $\mathbf{t}$  y  $\nabla\phi$  son vectores paralelos.

Podemos introducir una *derivada direccional* de la función escalar  $\phi(\mathbf{r})$  a lo largo de la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$  en el punto  $\mathbf{r}_o$  generaliza este concepto,

$$D_{\mathbf{u}}\phi = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r}_o + \Delta s \mathbf{u}) - \phi(\mathbf{r}_o)}{\Delta s} = \nabla\phi \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

donde  $\Delta s$  es la variación en la dirección del vector  $\mathbf{u}$  unitario. El valor de  $D_{\mathbf{u}}\phi$  se reduce a la derivada ordinaria en una dimensión a lo largo de  $\mathbf{u}$ , existen tantas derivadas como posibles direcciones y para los ejes cartesianos,

$$D_{\mathbf{i}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad D_{\mathbf{j}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad D_{\mathbf{k}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

<sup>3</sup>Es intuitivo en tres dimensiones pues  $z = \phi(x, y)$  define una superficie (fig. 3), también  $u = \phi(x, y, z)$  en cuatro, etc.

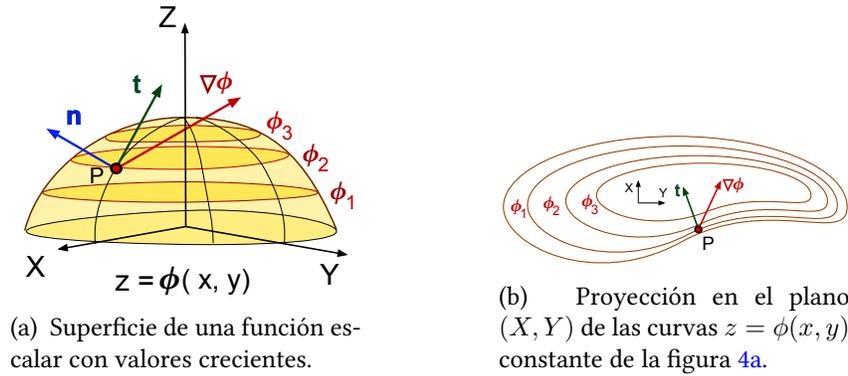


Figura 4: Vectores normal  $\mathbf{n}$ , tangente  $\mathbf{t}$  y  $\nabla\phi$  en el punto  $P$  de la superficie que forma una función escalar  $z = \phi(x, y)$ , que toma los valores constantes  $\phi_1, \phi_2$  y  $\phi_3$  a lo largo de las curvas que se indican.

Se define el *operador nabla* agrupando las derivadas parciales como las componentes de un vector,

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

de modo que el gradiente de una función escalar  $\nabla\phi$  resulta ser un campo vectorial. Cuando el *operador nabla* actúa sobre una función vectorial podemos tener dos resultados,

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

es un escalar denominado *divergencia del campo vectorial* (también se escribe  $\text{Div } \mathbf{P}$ ). La operación,

$$\nabla \wedge \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial P_z}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

es una función vectorial denominada *rotacional del campo*  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  que también se escribe a veces como  $\text{Rot } \mathbf{P}$ .

Combinando operadores y funciones pueden definirse derivadas de segundo orden, como  $\nabla\phi$  es un campo vectorial y podemos calcular su divergencia,

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

que se escribe también  $\nabla^2\phi$  y se llama *Laplaciano* de una función escalar. Puede comprobarse directamente que  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{P}) = 0$  y también  $\nabla \wedge (\nabla\phi) = 0$

El *Laplaciano de una función vectorial*  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  puede introducirse mediante una igualdad<sup>4</sup>, análoga al producto vectorial de tres vectores se tiene,

$$\nabla^2 \mathbf{P} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{P})$$

<sup>4</sup>Sin demostración, puede comprobarse que es cierta directamente en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3 \\
 \nabla \wedge \mathbf{r} &= 0 \\
 \nabla \wedge (\nabla \phi) &= 0 \\
 \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{P}) &= 0 \\
 \nabla (\phi \varphi) &= (\nabla \phi) \varphi + \phi (\nabla \varphi) \\
 \nabla \wedge (\phi \mathbf{P}) &= \nabla \phi \wedge \mathbf{P} + \phi \nabla \wedge \mathbf{P} \\
 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla^2 \mathbf{P} \\
 \nabla \cdot (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{Q})
 \end{aligned}$$

Cuadro 1: Algunas identidades donde  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  son  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  funciones vectoriales y  $(\phi, \varphi)$  campos escalares.

que en coordenadas cartesianas<sup>5</sup> toma la forma,

$$\nabla^2 \mathbf{P} = \nabla^2 P_x \mathbf{i} + \nabla^2 P_y \mathbf{j} + \nabla^2 P_z \mathbf{k}$$

Las relaciones vectoriales que emplearemos con frecuencia en este curso se encuentran en la tabla 1 y las expresiones de los operadores diferenciales en los sistemas coordenados más comunes en la tabla 2.

## 1.2. Curvas y superficies. Convenio de signos

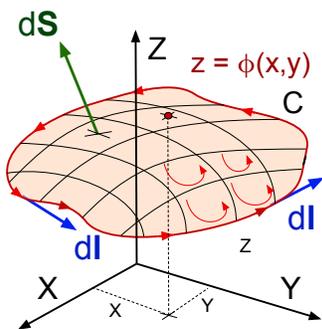


Figura 5: Superficie  $S$  que se apoya en la curva  $C$ .

En el espacio tridimensional una curva en el espacio está descrita por un conjunto de vectores  $\mathbf{r}(s)$ , donde  $s$  es un parámetro escalar, de modo análogo a la trayectoria de un punto material  $\mathbf{r}_p(t)$  en la Mecánica Clásica.

Como muestra la figura 5, en el espacio tridimensional una superficie está descrita por una función escalar  $z = \phi(x, y)$  siendo  $z$  la altura o valor que toma la función en cada punto  $(x, y)$  del plano. La superficie  $S$  está delimitada por la curva  $C$  en la que se apoya y que se descompone en un conjunto de *teselas* con superficie infinitesimal  $dS$ . Su orientación en el espacio se caracteriza mediante el vector  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  donde  $\mathbf{n}$  un vector unitario perpendicular que apunta a lo largo de la *normal exterior* cuando la superficie  $S$  es cerrada.

<sup>5</sup>En otros sistemas coordenados la expresión es más compleja.

Para la curva  $C$  se define el vector  $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ , donde  $dl$  es el elemento de longitud infinitesimal y  $\mathbf{t}$  un vector unitario tangente a la curva en cada punto como se indica en la figura 5. Como sentido *positivo* del recorrido de  $C$  se toma el contrario a las agujas del reloj cuando  $d\mathbf{S}$  apunta en el sentido indicado en el esquema.

En cada punto de la superficie de la figura podemos definir un vector unitario tangente  $\mathbf{t}$  y la variación de la función  $d\phi/ds = \nabla\phi \cdot \mathbf{t}$  en su dirección será la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}}\phi$  definida en (2). En el caso particular que  $\mathbf{u}$  es uno de los vectores unitarios  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  coincide con la derivada parcial, es decir con la derivada evaluada a lo largo de la curva que resulta de la intersección de  $S$  con uno de los planos  $(X, Z)$  o  $(Y, Z)$ .

La curva  $C$  que delimita la superficie puede entenderse también como la suma o combinación de los recorridos a lo largo de los contornos de las teselas individuales en que se descompone  $S$  como se muestra en el esquema. También la superficie  $S$  total resulta de la suma de las superficies individuales de cada una de las teselas en que se descompone la misma.

### 1.3. Integrales de funciones vectoriales

Para una función vectorial podemos definir integrales más generales que la del cálculo infinitesimal elemental asociada con el área  $I$  bajo una curva. Integrales en dos o tres dimensiones describen el área de una superficie  $S$  o al volumen  $V$  de un cuerpo; por ejemplo,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad , \quad S = \int_S f(x, y) dx dy \quad , \quad V = \int_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Supongamos que tenemos un campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  definido en una zona del espacio y  $d\mathbf{l}$  es el elemento de longitud, tangente a la curva  $C$  que delimita la superficie  $S$  como en la figura 5. Empleando las operaciones vectoriales que conocemos podemos definir un diferencial escalar,

$$d\varphi = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad \text{y el vector,} \quad d\mathbf{G} = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{l}$$

en todos los puntos de dicha curva. Igualmente, en cada tesela infinitesimal en que se descompone la superficie  $z = \phi(x, y)$  tendríamos,

$$d\Phi = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{y también,} \quad d\mathbf{H} = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{S}$$

donde  $d\mathbf{S}$  apunta en la dirección de la normal exterior. No vamos a estudiar todas las posibilidades pero comprobaremos que  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$  y  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  tienen sentido físico directo. La primera da lugar a la *integral de línea* o *circulación* de un vector, y es el concepto necesario para introducir el *trabajo* de una fuerza en la Mecánica Clásica. La segunda corresponde al *flujo* de un campo vectorial a través de una superficie y está relacionado con el transporte de una magnitud física como la masa o la carga eléctrica a través de la misma.

#### 1.3.1. Integral de línea

Como hemos visto, en la sección 1.1 una curva  $C$  en el espacio (por ejemplo, la trayectoria de un punto material) puede describirse mediante una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  que depende de un parámetro escalar (en la trayectoria del punto  $t$  es el tiempo). Consideremos además que una función vectorial está definida en la misma zona del espacio,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(\mathbf{r}) \mathbf{i} + V_y(\mathbf{r}) \mathbf{j} + V_z(\mathbf{r}) \mathbf{k}$$

de modo que en cada punto de la curva  $C$  la función vectorial toma el valor  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ .

Como muestra la figura 6 entre dos puntos de la curva  $A$  y  $B$  dados podemos dividirla en  $N$  tramos pequeños de longitud  $|\Delta \mathbf{r}_j|$  definidos por los vectores

$$\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$$

y la función vectorial toma los valores  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}(\mathbf{r}_j)$ . En cada uno de los  $j = 1, 2, \dots, N + 1$  puntos podemos construir los productos escalares,

$$\mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j = |\mathbf{V}_j| |\Delta \mathbf{r}_j| \cos \theta_j$$

donde  $\theta_j$  es el ángulo que forma el vector  $\Delta \mathbf{r}_j$  con el vector  $\mathbf{V}_j$ . Puesto que el resultado de cada producto escalar es un número podemos sumarlos,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j$$

Figura 6: Curva  $C$  definida por  $\mathbf{r}(s)$  en un campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ .

y tomar el límite, haciendo que el número de tramos  $N$  en que dividimos la curva  $C$  entre  $A$  y  $B$  aumente indefinidamente, y las distancias  $|\Delta \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|$  sean cada vez más pequeñas.

Entonces, el vector  $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1} \rightarrow d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$  es paralelo al vector  $\mathbf{t}$  tangente a la curva en cada punto cuyo módulo infinitesimal es la longitud de arco  $dl$ . Tendremos entonces,

$$I = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j \rightarrow \int_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Esta última expresión se denomina *integral de línea* del campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  a lo largo de la curva  $C$  entre los puntos  $A$  y  $B$  considerados. Al vector  $d\mathbf{l}$  se le aplican los criterios discutidos en la página. 6 sobre el sentido de recorrido de la curva. Cuando es cerrada se suele indicar en el signo integral,

$$I = \oint_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

y se la denomina *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  a lo largo de la curva  $C$ .

Además, si la curva es una función suave sobre una misma superficie como se muestra en la figura 7, la circulación puede descomponerse en dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  que comparten un tramo común  $AB$ . Si extendemos la integral de línea sobre los bordes de cada uno de los dos recintos de la figura 7 tendremos,

$$I = \oint_C \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Evidentemente la circulación del campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  en el sentido  $AB$  será igual y cambiada de signo a la del sentido  $BA$  y a lo largo de este tramo  $dl_1 = -dl_2$ ,

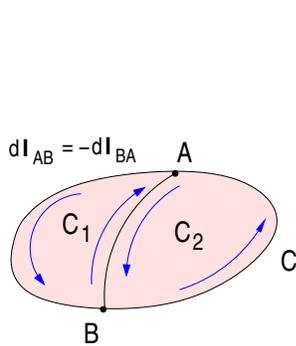


Figura 7: La curva cerrada  $C$  se descompone en dos  $C_1$  y  $C_2$ .

$$\int_A^B \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_B^A \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2$$

Si reemplazamos en la figura 6 el campo vectorial por la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre un punto material a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  de su movimiento recuperamos tendremos,

$$W_{AB} = \sum_{j=1}^N \Delta W_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \Delta \mathbf{r}_j \rightarrow W_{AB} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

y recuperamos el concepto de *trabajo* de una fuerza entre los puntos  $A$  y  $B$  empleado en la Mecánica Clásica. En el caso particular en que el punto se mueve a lo largo de una línea recta  $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i}$  recta será  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$ ,

$$W_{AB} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_A}^{x_B} |\mathbf{F}| \cos \theta dx = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx$$

y la integral de línea se reduce a una integral ordinaria.

• **Ejemplo:** Calculamos primero la circulación del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  a lo largo de un círculo de radio  $R_o$  centrado en el origen de coordenadas.

Tenemos que  $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = \rho \mathbf{u}_\rho$  donde  $\mathbf{u}_\rho = \rho/\rho$  es el vector unitario radial en coordenadas cilíndricas y  $\mathbf{F}(R_o) = R_o \mathbf{u}_\rho$  es su valor en los puntos del círculo. El vector  $d\mathbf{l}$  tangente a la circunferencia es,

$$d\mathbf{l} = dl \mathbf{u}_\varphi = (R_o d\varphi) (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})$$

y  $dl = R_o d\varphi$  es la longitud de un arco elemental. En este caso la circulación es nula puesto que,

$$dI = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (R_o \mathbf{u}_\rho) \cdot (\mathbf{u}_\varphi dl) = R_o (\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\varphi) dl = 0$$

son vectores ortogonales.

La circulación no es cero si por ejemplo permutamos las componentes  $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$  y ahora el valor de la función sobre el círculo de radio  $R_o$  será,

$$\mathbf{F}(R_o) = -R_o \sin \varphi \mathbf{i} + R_o \cos \varphi \mathbf{j} \quad \text{y tendremos,} \quad dI = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = R_o^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi$$

que hemos de integrar sobre toda la circunferencia y como  $(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 1$  resulta,

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = R_o^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R_o^2$$

### 1.3.2. Flujo de un campo vectorial

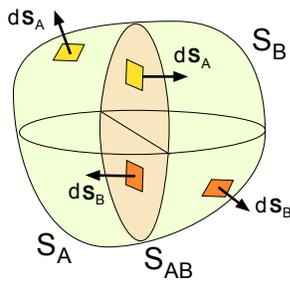
Una superficie de la figura 5 puede descomponerse en un conjunto  $j = 1, 2, \dots, N$  de teselas de área infinitesimal  $\Delta S_j$  caracterizadas por el vector  $\Delta \mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j \Delta S$  donde  $\mathbf{n}_j$  es un vector unitario que apunta en la dirección de la normal exterior. El centro de cada elemento  $\Delta \mathbf{S}_j$  está situado el punto  $\mathbf{r}_j$  donde una función vectorial toma el valor  $\mathbf{V}_j = V(\mathbf{r}_j)$  y podemos evaluar el producto escalar,

$$\Phi_j = \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{S}_j = |\mathbf{V}_j| \Delta S_j \cos \theta_j$$

que en la proyección de  $\mathbf{V}_j$  en la dirección perpendicular al área  $\Delta S$ . Podemos sumar las  $\Phi_j$  cantidades escalares correspondientes a las  $j = 1, 2, \dots, N$  teselas en que se divide la superficie  $S$ ,

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \Phi_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j \cdot \Delta \mathbf{S}_j \rightarrow \Phi = \int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

La integral se denomina *flujo* del campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  a través de la superficie  $S$  y se obtiene en el límite  $\Delta S_j \rightarrow dS = \mathbf{n} dS$  en que las teselas son elementos de superficie infinitesimales.



Cuando una superficie cerrada  $S$  puede ser descompuesta en dos  $S_A$  y  $S_B$  con una pared común  $S_{AB}$  como en la figura 8 se tiene,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_A + \oint_{S_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_B$$

puesto que sobre la superficie  $S_{AB}$  común  $d\mathbf{S}_A = -d\mathbf{S}_B$  y las integrales,

$$\int_{S_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_A + \int_{S_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_B = 0$$

Figura 8: La superficie  $S$  dividida en  $S_A$  y  $S_B$  por una pared común.

Es decir, el flujo del campo vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  sobre la superficie compartida  $S_{AB}$  es igual y cambiado de signo.

Como veremos seguidamente el concepto de *flujo* esta frecuentemente asociado al *transporte* de una magnitud física a través de una superficie. A continuación ilustramos el cálculo con dos ejemplos sencillos.

• **Ejemplo:** Vamos a calcular el flujo de campo vectorial  $\mathbf{F} = -x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  sobre un el cuadrado de la figura 9 de lados  $l$  y  $m$  situado en el en el plano  $z = z_o$  paralelo al plano  $(x, y)$ .

Primero vemos que el vector de superficie es  $d\mathbf{s} = \mathbf{k} dS = \mathbf{k} (dx dy)$  con lo que tendremos,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (-x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} dx dy) = z dx dy$$

y la flujo a través del cuadrado será,

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S z dx dy = z_o \times \left( \int_0^l dx \right) \times \left( \int_0^m dy \right) = z_o l m$$

Sobre el cuadrado de la figura la coordenada  $z = z_o$  es constante y entonces la integral es simplemente el área  $A = l \times m$  del cuadrado.

- **Ejemplo:** Calculamos el flujo de campo vectorial  $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  sobre una superficie esférica de radio  $R_o$  centrada en el origen de coordenadas.

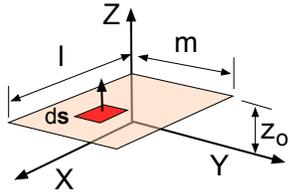


Figura 9: Cuadrado de área  $(l \times m)$ .

Ahora tenemos que  $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = r \mathbf{e}_r$  donde  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  es el vector unitario radial y el que caracteriza la superficie es,

$$d\mathbf{s} = dS \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r dS$$

y tendremos entonces,

$$\Phi = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S (r \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{e}_r dS) = R_o \times \int_S dS$$

Finalmente,

$$\Phi = R_o \times (4 \pi R_o^2) = 4 \pi R_o^3$$

donde de nuevo el valor de  $r = R_o$  es constante sobre la superficie de la esfera y el resultado es simplemente el producto de  $R_o$  por el área de la misma.

En esto dos ejemplos el cálculo de la integral que resulta en (3) es inmediato porque la función que integramos toma un valor constante sobre la superficie  $S$  considerada. Evidentemente, este no es el caso general y determinar el flujo de un campo vectorial puede ser más complejo que en estos dos sencillos ejercicios.

## 1.4. El vector densidad de corriente

Vamos a aplicar este concepto de *flujo* de un campo vectorial al transporte de masa y carga eléctrica, aunque puede generalizarse para cualquier otra magnitud física, como la energía o la cantidad de movimiento. Primero consideremos una superficie pequeña de área  $\delta S$  y un fluido que se mueve en la dirección de su vector unitario normal  $\mathbf{n}$  con velocidad  $\mathbf{u}$  constante<sup>6</sup> como indica la figura 10a. En el tiempo  $\delta t$  se formará una columna de líquido de longitud  $\delta l = u \times \delta t$  que tienen un volumen,

$$\delta V = \delta S \times \delta l = \delta S \times (u \delta t)$$

Si la densidad del fluido es  $\rho_m$  la masa del mismo que ha pasado por el área  $\delta S$  será,

$$\delta M = \rho_m \times \delta V = \rho_m \delta S \times (u \delta t) \quad (4)$$

de modo que el cociente,

$$\frac{\delta M}{\delta t} = \rho_m \times u \delta S$$

es el *flujo másico* que representa la masa que sale por  $\delta S$  por unidad de tiempo.

En la figura 10a hemos considerado que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{n}$  son dos vectores paralelos, es decir, que la superficie  $\delta S$  es perpendicular a la dirección del movimiento del líquido. Esta no es la situación general,

<sup>6</sup>Podemos imaginar que es una columna de pasta de dientes saliendo del tubo.

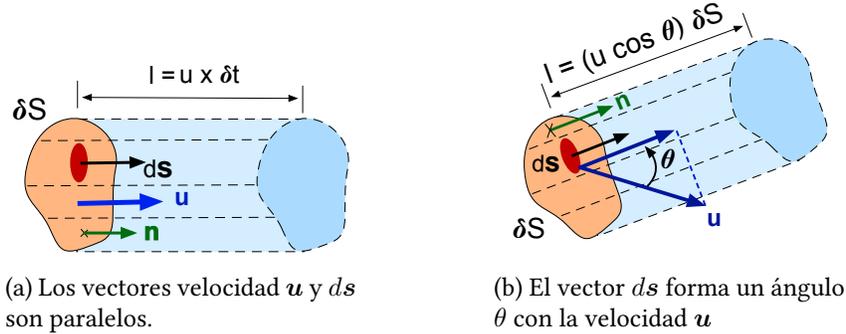


Figura 10: Esquemas del movimiento de un líquido con velocidad  $\mathbf{u}$  a través de una superficie  $\delta S$  pequeña con un versor unitario normal  $\mathbf{n}$  paralelo a su vector  $d\mathbf{s}$  de superficie.

pues como muestra la figura 10b la velocidad  $\mathbf{u}$  puede formar un ángulo con el vector unitario  $\mathbf{n}$  (y también a  $d\mathbf{s}$ ) perpendicular a la superficie. Para el movimiento del líquido a lo largo de la dirección  $\mathbf{n}$  normal a  $\delta S$  consideramos la componente de la velocidad  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u \cos \theta$  como muestra la figura 10b. Sustituyendo en (4) la velocidad  $u \rightarrow u \cos \theta$  resulta,

$$\frac{\delta M}{\delta t} = \rho_m \times (u \cos \theta) \times \delta S \quad \text{es decir,} \quad \frac{\delta M}{\delta t} = \rho_m \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{s}$$

es el nuevo *flujo másico* donde  $\delta \mathbf{s} = \mathbf{n} \delta S$  es el vector que caracteriza la superficie. Podemos generalizar esta última expresión si consideramos como muestra la figura que una superficie  $S$  cualquiera puede descomponerse en  $j = 1, 2, \dots, N$  elementos de superficie  $\delta \mathbf{s}_j$  situados en los puntos  $\mathbf{r}_j$  donde la velocidad del líquido es  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_j)$  y sumando,

$$\frac{\delta M}{\delta t} = \sum_{j=1}^N \rho_m(\mathbf{r}_j) \mathbf{u}(\mathbf{r}_j) \cdot \delta \mathbf{s}_j$$

En el límite para  $N$  grande pasamos del sumatorio a la integral,

$$\frac{dM}{dt} = \int_S \rho_m \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s} \quad (5)$$

Podemos introducir un vector  $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) = \rho_m \mathbf{u}$  paralelo a la velocidad en cada punto al que llamaremos *densidad de flujo másico* y representa la masa que fluye por unidad de tiempo y de superficie. Alternativamente, si consideramos la corriente eléctrica como un conjunto discreto de  $j = 1, 2 \dots N$  cargas puntuales  $q_j$  que se mueven con velocidad  $\mathbf{u}_j$  dentro de un volumen pequeño  $\delta v$  es el límite,

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}) = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v} \left( \sum_j q_j \mathbf{u}_j \right) \quad \text{y la densidad de carga,} \quad \rho_c(\mathbf{r}) = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v} \left( \sum_j q_j \right)$$

Podríamos repetir todos los pasos anteriores utilizando la *densidad de carga*  $\rho_q(\mathbf{r})$  en lugar de la de masa  $\rho_m(\mathbf{r})$  y entonces la carga  $dQ/dt$  que fluye a través de una superficie  $S$  será,

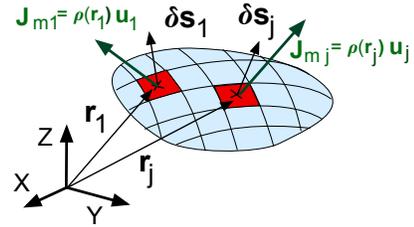


Figura 11: Superficie  $S$  dividida en elementos  $\delta \mathbf{s}_j$ .

$$\frac{dQ}{dt} = \int_S \rho_q \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{s} \quad (6)$$

Puesto que  $I_c = dQ/dt$  es la corriente eléctrica, es decir, la carga que atraviesa  $S$  en la unidad de tiempo, al vector  $\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) = \rho_q \mathbf{u}$  se le denomina *densidad de corriente eléctrica*. Describe la cantidad de carga eléctrica que pasa por unidad de superficie y tiempo.

Como vemos el *flujo másico*  $dM/dt$  (5) o la *corriente eléctrica*  $I_c = dQ/dt$  (6) son magnitudes escalares que resultan de integrar el producto  $(\mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s})$  o  $(\mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{s})$  sobre la misma. Son dos casos particulares de la definición general de *flujo* de un campo vectorial.

Puesto que  $d\mathbf{s} = \mathbf{n} dS$  apunta en la dirección del vector unitario normal exterior y cuando  $S$  es *abierta* hay que especificarlo pues para  $\mathbf{n}$  hay dos sentidos posibles. Si no se producen cargas dentro de la superficie  $S_c$  y es *cerrada* como en la figura 12 que define un volumen  $V_c$ , el vector  $d\mathbf{s}$  apunta siempre *hacia afuera* y hay que corregir el signo de (6),

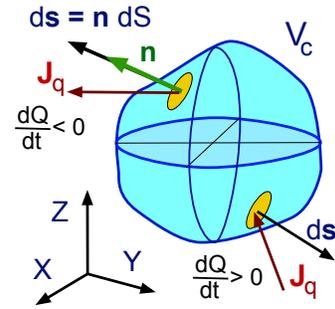


Figura 12: Flujo de  $\mathbf{J}_c$  sobre una superficie  $S_c$  cerrada.

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{S_c} \mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{s} \quad (7)$$

De este modo, la carga dentro de  $V_c$  aumenta ( $dQ/dt > 0$ ) si las cargas se *mueven hacia el interior* y  $\mathbf{J}_q$  y  $d\mathbf{s}$  tienen sentidos opuestos ( $\mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} < 0$ ) como se muestra en el esquema 12. En el caso contrario  $\mathbf{J}_c$  apunta *hacia el exterior* del volumen  $V$  y como  $\mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{s} > 0$  la carga encerrada ( $dQ/dt > 0$ ) disminuye.

Finalmente, si no se producen cargas en el interior de  $V_c$  podemos escribir una última expresión empleando en (7) el teorema de Gauss o de la divergencia, que veremos en la siguiente sección 2.1.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho_q dv = - \int_{S_c} \mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{s} = - \int_c \nabla \cdot \mathbf{J}_c dv \quad \text{luego,} \quad \int_{V_c} \left( \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_c \right) dv = 0$$

donde hemos introducido la derivada parcial  $\partial \rho_q / \partial t$  pues la densidad  $\rho_q(\mathbf{r}, t)$  depende de dos argumentos<sup>7</sup>. Como el volumen  $V_c$  en la última ecuación es arbitrario podemos escribir,

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0 \quad (8)$$

cuando no hay producción de cargas dentro de la superficie  $S_c$ . A esta última ecuación se le llama *ecuación de continuidad* de la carga eléctrica y repitiendo los mismos argumentos para el vector  $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)$  podríamos derivar otra análoga para el transporte de masa.

<sup>7</sup>La carga  $Q(t)$  sólo depende del tiempo al integrar  $\rho_q(\mathbf{r}, t)$  sobre el volumen  $V_s$ .

## 2. Teoremas integrales.

Se trata de dos resultados importantes del cálculo vectorial para una función vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  que utilizaremos con frecuencia. El *teorema de la divergencia* se aplica a una superficie cerrada  $S$  que encierra un volumen  $V_m$ ,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

y si  $\Gamma$  es una curva cerrada que delimita una superficie  $S$  la igualdad,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

es el denominado *teorema de Stokes*.

La primera igualdad permite transformar una integral de superficie (el *flujo* del campo  $\mathbf{A}$ ) en una integral de volumen y la segunda calcula la circulación del campo a lo largo de una curva como una integral de superficie. Aunque no haremos una demostración formal vamos a comprobar que para una función vectorial de buen comportamiento ambas igualdades se cumplen.

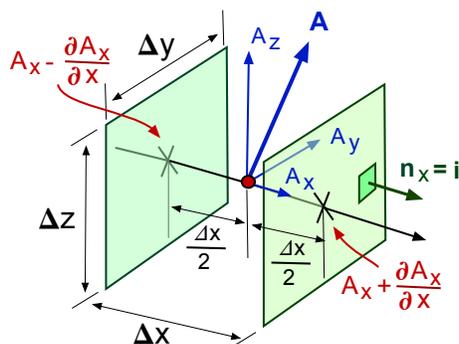
### 2.1. Teorema de la divergencia o de Gauss

Consideramos un cubo de lado infinitesimal situado en el punto  $\mathbf{r}$  en cuyo dentro geométrico un campo vectorial toma el valor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  como muestra la figura 13a. Para el flujo de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  a lo largo de la dirección  $X$  tendremos,

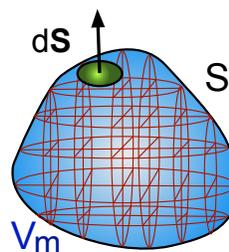
$$(\Delta\Phi)_x = \Phi_{der} - \Phi_{izq} = \mathbf{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot \Delta\mathbf{S}_{der} - \mathbf{A}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot \Delta\mathbf{S}_{izq}$$

donde  $\Delta\mathbf{S}_{der} = \mathbf{i} \Delta S_{der} = \mathbf{i} \Delta y \Delta z$  y  $\Delta\mathbf{S}_{izq} = (-\mathbf{i}) \Delta S_{izq} = (-\mathbf{i}) \Delta y \Delta z$  son paralelos al eje  $X$ . Si aproximamos la función vectorial sobre la cara derecha del cubo del esquema donde la coordenada  $x + \Delta x/2$  es constante tendremos,

$$\mathbf{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot \Delta\mathbf{S}_{der} \simeq \left( A_x(\mathbf{r}) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \times (\Delta y \Delta z)$$



(a) Celda elemental infinitesimal.



(b) Volumen  $V_m$  encerrado por la superficie  $S$ .

Figura 13: Cubo elemental de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  donde una función vectorial toma el valor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  en su centro geométrico  $\mathbf{r}$  y esquema un volumen  $V_m$  dividido en celdas infinitesimales  $dV = dx dy dz$ .

y sobre la izquierda,

$$\mathbf{A}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot \Delta \mathbf{S}_{izq} \simeq \left( A_x(\mathbf{r}) - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \times (\Delta y \Delta z)$$

Resulta entonces,

$$(\Delta \Phi)_x = \Phi_{der} - \Phi_{izq} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \times (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

Podemos repetir el mismo razonamiento para los otros dos ejes y entonces,

$$\Delta \Phi_{tot} = (\Delta \Phi)_x + (\Delta \Phi)_y + (\Delta \Phi)_z = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \times (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

el paréntesis es igual a  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  y para el flujo  $\Delta \Phi = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}$  sobre la superficie  $S$  exterior del cubo infinitesimal tendremos,

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

Esta última identidad es válida para cada uno de los cubos en que puede dividirse un volumen macroscópico  $V_m$  como en la figura 13b. Integrando tendremos,

$$\boxed{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{A} dV} \quad (9)$$

y esta igualdad se denomina *teorema de la divergencia* y también *de Gauss*.

## 2.2. Teorema de Stokes

Como en el apartado anterior tomamos la superficie de la figura 14a formada por las tres caras cuadradas de un cubo infinitesimal centrado en un punto  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es el valor que toma una función vectorial. La integral de línea,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{CEFD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{DFGA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

sobre su borde  $\Gamma$  en azul puede descomponerse en la suma de las integrales a lo largo de los límites de los tres cuadrados recorridos en el sentido que se indica.

En el cuadrado  $ABCD$  se tiene  $\Delta \mathbf{l} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$  y es constante la coordenada  $z_o = z - \Delta z/2$  entonces,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ABCD} &= A_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z_o\right) \Delta y_{AB} + A_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z_o\right) \Delta x_{BC} \\ &+ A_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z_o\right) \Delta y_{CD} + A_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z_o\right) \Delta x_{DA} \end{aligned}$$

Además,  $\Delta y_{AB} = \Delta y = -\Delta y_{CD} = -\Delta y$  también  $\Delta y_{BC} = -\Delta x = -\Delta y_{DA} = \Delta x$  por el sentido de recorrido. Los valores de las componentes de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  a lo largo de cada tramo se aproximan por su desarrollo en serie de potencias,

$$A_x\left(x, y \pm \frac{\Delta y}{2}, z_o\right) \simeq A_x(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad , \quad A_y\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z_o\right) \simeq A_y(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

Sustituyendo estos valores,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ABCD} \simeq \left( A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \times \Delta y + \left( A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \times (-\Delta x) \\ + \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta y}{2} \right) \times (-\Delta y) + \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \times (-\Delta x)$$

y resulta entonces,

$$(\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{l})_{ABCD} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Podemos introducir el vector superficial  $\Delta \mathbf{S}_{xy} = \Delta S_{xy} \mathbf{k}$  de área elemental  $\Delta S_{xy} = (\Delta x \Delta y)$  con dirección y sentido coherente con el sentido de recorrido contrario a las agujas del reloj.

Repetimos los mismos pasos para el cuadrado  $ADFG$  donde  $\Delta \mathbf{l} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta z \mathbf{k}$  y es constante la coordenada  $y_o = y - \Delta y/2$  resulta,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ADFG} = A_x(x, y_o, z - \frac{\Delta z}{2}) \Delta x_{AD} + A_z(x - \frac{\Delta x}{2}, y_o, z) \Delta z_{DF} \\ + A_x(x, y_o, z + \frac{\Delta z}{2}) \Delta x_{FG} + A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y_o, z) \Delta z_{GA}$$

Aquí  $\Delta x_{AD} = \Delta x = -\Delta x_{FG} = -\Delta x$  también  $\Delta z_{DF} = \Delta z = -\Delta z_{DA}$  y aproximamos los valores de las componentes de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  como anteriormente,

$$A_x(x, y_o, z \pm \frac{\Delta z}{2}) \simeq A_x(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \quad \text{y} \quad A_z(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y_o, z) \simeq A_z(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

Sustituyendo ahora tenemos,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ADFG} \simeq \left( A_x - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \times (-\Delta x) + \left( A_z - \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \times \Delta z \\ + \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \times \Delta x + \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \times (-\Delta z)$$

Obtenemos para este cuadrado,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ADFG} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z$$

y ahora el vector superficial es  $\delta \mathbf{S}_{xz} = \delta S_{xz} \mathbf{j}$  donde  $\delta S_{xz} = (\Delta x \Delta z)$ .

En el tercer cuadrado  $CEFD$  tenemos  $\Delta \mathbf{l} = \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$  y permanece constante la coordenada  $x_o = x - \Delta x/2$  luego,

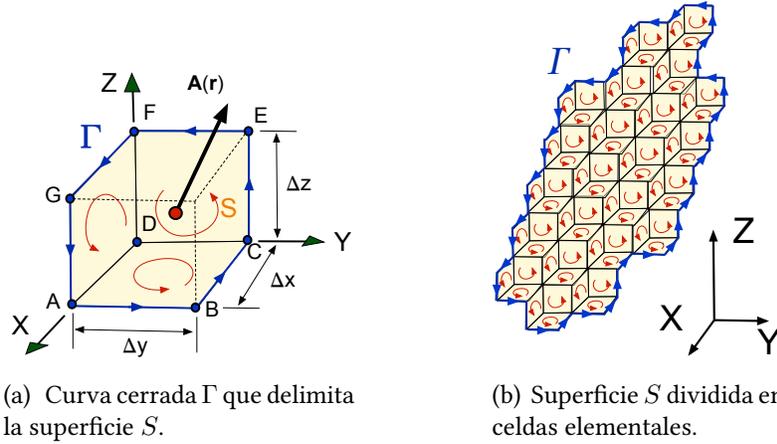


Figura 14: Curva cerrada  $\Gamma$  se define el contorno de la superficie  $S$  formada por tres lados de un cubo elemental donde una función vectorial toma el valor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  en su centro geométrico  $\mathbf{r}$  y a la derecha el esquema de una superficie dividida en teselas elementales delimitada por la curva  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{CEFD} &= A_z(x_o, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \Delta z_{CE} + A_y(x_o, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \Delta y_{EF} \\
 &\quad + A_z(x_o, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \Delta z_{FD} + A_y(x_o, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \Delta y_{DC}
 \end{aligned}$$

y ahora  $\Delta z_{CE} = \Delta z = -\Delta z_{FD} = -\Delta Z$  también  $\Delta y_{DC} = \Delta y = -\Delta y_{EF} = -\Delta y$  y aproximamos,

$$A_z(x_o, y \pm \frac{\Delta y}{2}, z) \simeq A_z(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad \text{y} \quad A_y(x_o, y, z \pm \frac{\Delta z}{2}) \simeq A_y(\mathbf{r}) \pm \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

Con lo que resulta,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{CEFD} &\simeq \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \times \Delta z + \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \times (-\Delta y) \\
 &\quad + \left( A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \times (-\Delta z) + \left( A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \times \Delta y
 \end{aligned}$$

se tiene entonces,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{CEFD} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z$$

y con  $\delta S_{zy} = (\Delta y \Delta z)$  definimos el vector superficial  $\delta \mathbf{S}_{zy} = \delta S_{zy} \mathbf{i}$  para este cuadrado.

Sumando las contribuciones de cada uno de los tres cuadrados obtenemos para la circulación a lo largo de la curva  $\Gamma$ ,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{\Gamma} = (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ABCD} + (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{ADFG} + (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{CEFD}$$

Luego,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{\Gamma} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z + \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z$$

que puede reordenarse empleando notación vectorial,

$$(\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{l})_{\Gamma} = \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot (\Delta \mathbf{S}_{xz} + \Delta \mathbf{S}_{yz} + \Delta \mathbf{S}_{xy})$$

De nuevo esta igualdad es válida para la curva cerrada  $\Gamma$  que encierra los tres cuadrados de área infinitesimal de la figura 14a. Sin embargo, como muestra la figura 14b cualquier superficie  $S$  de buen comportamiento delimitada por la curva cerrada  $\Gamma$  puede descomponerse en un mallado. En el límite tendremos  $\Delta \mathbf{l} \rightarrow d\mathbf{l}$  el vector superficial será  $(\Delta \mathbf{S}_{yz} + \Delta \mathbf{S}_{xz} + \Delta \mathbf{S}_{xy}) \rightarrow d\mathbf{S}$  y resulta,

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

e integrando obtenemos la igualdad denominada *Teorema de Stokes*,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

### 2.2.1. Campos conservativos

Decimos que un campo vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  es *irrotacional* o *conservativo* cuando cumple que  $\nabla \wedge \mathbf{A} = 0$  y aplicado la igualdad (10) para una superficie  $S$  arbitraria,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{luego,} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

para toda curva  $\Gamma$  cerrada. Podemos escribir que  $\mathbf{A} = \nabla \phi$  donde  $\phi(\mathbf{r})$  es una función escalar ya que  $\nabla \wedge (\nabla \phi) = 0$  (ver tabla 1) y para dos puntos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  de la curva  $\Gamma$  con  $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$  se tiene,

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\phi}{dl} dl = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\phi = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)$$

empleando la ecuación (1). La integral de línea sólo depende del valor que toma la función escalar  $\phi(\mathbf{r})$  en los puntos inicial y final, no de la curva  $\Gamma$  a lo largo de la que se efectúa la integración.

Esta propiedad ya se ha empleado en la Mecánica Clásica para introducir el potencial gravitatorio  $U(\mathbf{r})$  puesto que la fuerza de atracción gravitatoria  $\mathbf{F}_g = -\nabla U$  es un campo conservativo. Como veremos el campo electrostático  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi$  también es un campo irrotacional donde  $\phi(\mathbf{r})$  es el potencial electrostático.

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas																											
Transformación		$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sen \varphi$ $z = z$	$x = r \sen \theta \cos \varphi$ $y = r \sen \theta \sen \varphi$ $z = r \cos \theta$																											
Elemento de longitud	$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}$	$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}$																											
Elemento de volumen	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\varphi dz$	$dV = r^2 \sen \theta dr d\theta d\varphi$																											
Elemento de superficie	$dS_x = dy dz$ $dS_y = dx dz$ $dS_z = dx dy$	$dS_\rho = \rho d\varphi dz$ $dS_\varphi = d\rho dz$ $dS_z = \rho d\rho d\varphi$	$dS_r = r^2 \sen \theta d\theta d\varphi$ $dS_\varphi = r dr d\theta$ $dS_\theta = r \sen \theta dr d\varphi$																											
Gradiente	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sen \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$																											
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho P_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sen \theta} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi}$ $+ \frac{1}{r \sen \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sen \theta P_\theta)$																											
Rotacional	$\nabla \wedge \mathbf{P} =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td><math>\mathbf{i}</math></td><td><math>\mathbf{j}</math></td><td><math>\mathbf{k}</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{\partial}{\partial x}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial y}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial z}</math></td></tr> <tr><td><math>P_x</math></td><td><math>P_y</math></td><td><math>P_z</math></td></tr> </table>	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$P_x$	$P_y$	$P_z$	$\nabla \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{\rho}$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td><math>\mathbf{u}_\rho</math></td><td><math>\rho \mathbf{u}_\varphi</math></td><td><math>\mathbf{k}</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{\partial}{\partial \rho}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial \varphi}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial z}</math></td></tr> <tr><td><math>P_\rho</math></td><td><math>\rho P_\varphi</math></td><td><math>P_z</math></td></tr> </table>	$\mathbf{u}_\rho$	$\rho \mathbf{u}_\varphi$	$\mathbf{k}$	$\frac{\partial}{\partial \rho}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$P_\rho$	$\rho P_\varphi$	$P_z$	$\nabla \wedge \mathbf{P} = \frac{1}{r^2 \sen \theta}$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td><math>\mathbf{e}_r</math></td><td><math>r \mathbf{e}_\theta</math></td><td><math>r \sen \theta \mathbf{e}_\varphi</math></td></tr> <tr><td><math>\frac{\partial}{\partial r}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial \theta}</math></td><td><math>\frac{\partial}{\partial \varphi}</math></td></tr> <tr><td><math>P_r</math></td><td><math>r P_\theta</math></td><td><math>r \sen \theta P_\varphi</math></td></tr> </table>	$\mathbf{e}_r$	$r \mathbf{e}_\theta$	$r \sen \theta \mathbf{e}_\varphi$	$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$P_r$	$r P_\theta$	$r \sen \theta P_\varphi$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$																												
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$																												
$P_x$	$P_y$	$P_z$																												
$\mathbf{u}_\rho$	$\rho \mathbf{u}_\varphi$	$\mathbf{k}$																												
$\frac{\partial}{\partial \rho}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\frac{\partial}{\partial z}$																												
$P_\rho$	$\rho P_\varphi$	$P_z$																												
$\mathbf{e}_r$	$r \mathbf{e}_\theta$	$r \sen \theta \mathbf{e}_\varphi$																												
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$																												
$P_r$	$r P_\theta$	$r \sen \theta P_\varphi$																												
Laplaciano	$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sen^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$ $+ \frac{1}{r^2 \sen \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sen \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$																											

Cuadro 2: Los operadores diferenciales en los sistemas coordenados más comunes. Los vectores  $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{k})$  son unitarios en las coordenadas cilíndricas y  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$  en esféricas indicados en las figuras 1 y 2.

## Referencias

- [1] David K. Cheng. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería. Addison Wesley Iberoamericana (1997).
- [2] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy. Fundamentos de la teoría electromagnética. Addison Wesley Iberoamericana (1996).
- [3] John D. Jackson. Electrodinámica clásica (2<sup>a</sup> Ed.). Editorial Alhambra (1980).
- [4] Paul Lorrain y Dale R. Corson. Campos y ondas electromagnéticos Selecciones Científicas (1972).