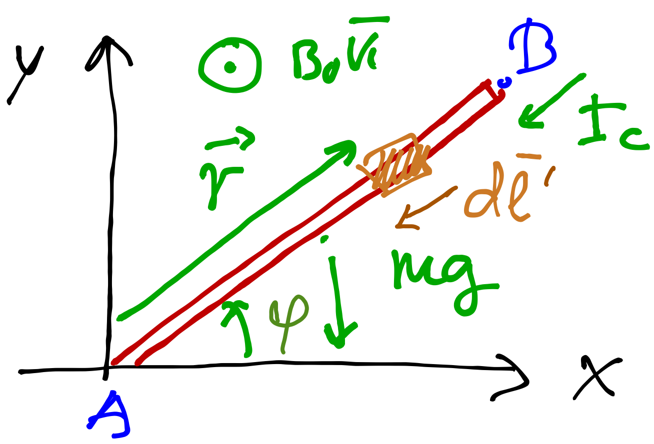
Prob. 7.12

En este caso el esquema de fuerzas es el del dibujo. El peso está aplicado en el centro de masas de la barra y empleamos coordenadas cilíndricas



Para que la varilla gire debe haber un momento de la fuerza magnética respecto del origen

$$d\vec{L}_m = \vec{r}' \wedge d\vec{F}_m$$

donde $\vec{r}'$ es la posición del elemento de circuito $d\vec{l}'$ donde se aplica la fuerza $d\vec{F}_m$.

$\vec{r}' = \rho\,\vec{u}_\rho$ $\quad d\vec{F}_m = I_c\, d\vec{l}' \wedge \vec{B}$ y $d\vec{l}' = -d\rho\,\vec{u}_\rho$ que apunta hacia A porque B→A es el sentido de la corriente

$$d\vec{F}_m = I_c\left[(-d\rho\,\vec{u}_\rho) \wedge (B_0\vec{k})\right] = -I_c B_0\, d\rho\, \underbrace{(\vec{u}_\rho \wedge \vec{k})}_{-\vec{u}_\varphi}$$

$$d\vec{F}_m = I_c B_0\, d\rho\, \vec{u}_\varphi$$ luego

$$d\vec{L}_m = (\rho\,\vec{u}_\rho) \wedge \left[I_c B_0\, d\rho\, \vec{u}_\varphi\right]$$

$$d\vec{L}_m = I_c B_0\, \rho\, d\rho\, \overbrace{(\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\varphi)}^{\vec{k}} = I_c B_0\, \rho\, d\rho\, \vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}_m = \int_0^L I_c B_o\, r\,dr\, \vec{k} = (I_c B_o \vec{k}) \int_0^L r\,dr$$

$$\vec{\Gamma}_m = (I_c B_o \vec{k}) \frac{L^2}{2} \qquad \vec{\Gamma}_m = I_c B_o \frac{L^2}{2} \vec{k}$$

El momento respecto de A del peso de la barra $\vec{\Gamma}_g$ es

$$\vec{\Gamma}_g = \left[\frac{L}{2} \vec{u}_\rho\right] \wedge \left[-mg\,\vec{j}\right]$$

donde $\vec{F}_g = -mg\,\vec{j}$ es la fuerza del peso aplicada en el centro de masas.

$$\vec{\Gamma}_g = -mg\frac{L}{2}\left[\vec{u}_\rho \wedge \vec{j}\right] = -mg\frac{L}{2}(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) \wedge \vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_g = -mg\frac{L}{2}\cos\varphi\,\vec{k}$$

Para que la barra gire alrededor del eje Z con una velocidad angular constante, el momento total aplicado tiene que ser nulo.

$$\vec{\Gamma}_g + \vec{\Gamma}_m = 0 \qquad -\frac{L}{2} mg \cos\varphi + I_c B_o \frac{L^2}{2} = 0$$

$$B_o = \frac{mg}{I_c L} \cos\varphi$$

NOTA: Hay que tener cuidado con el sentido de $d\vec{\ell}'$ y/o con el de la corriente I_c para que $\vec{\Gamma}_m$ y $\vec{\Gamma}_g$ tengan sentidos opuesto y el problema tenga sentido físico.