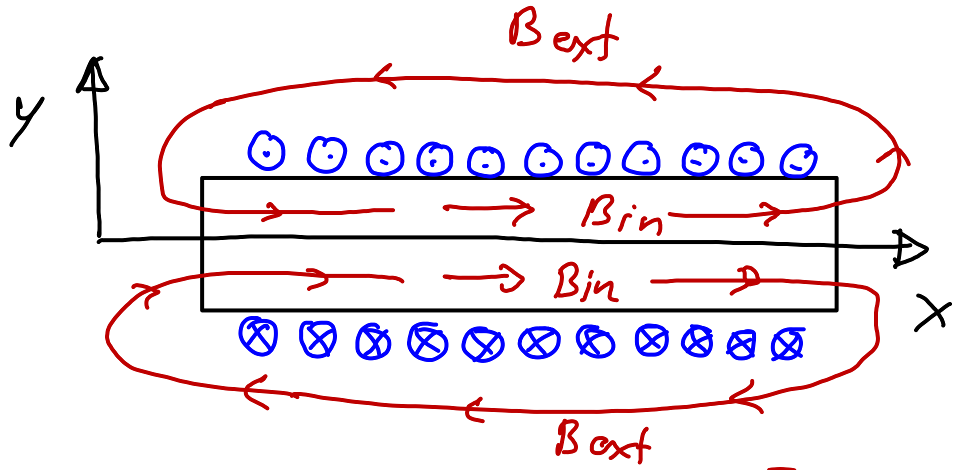
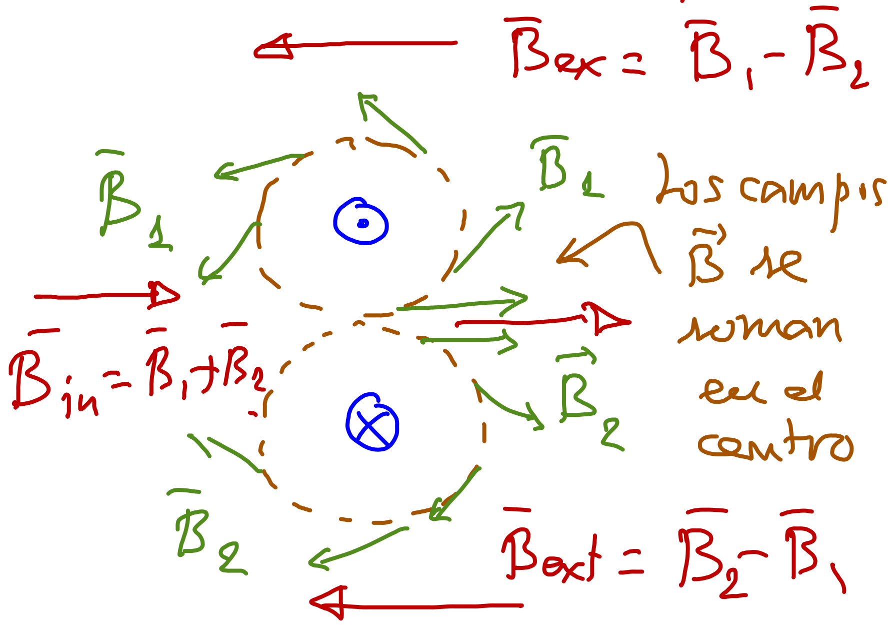
Prob. 7.7b

El campo $\vec{B}$ en el interior de un solenoide puede calcularse empleando la ley de Ampère.

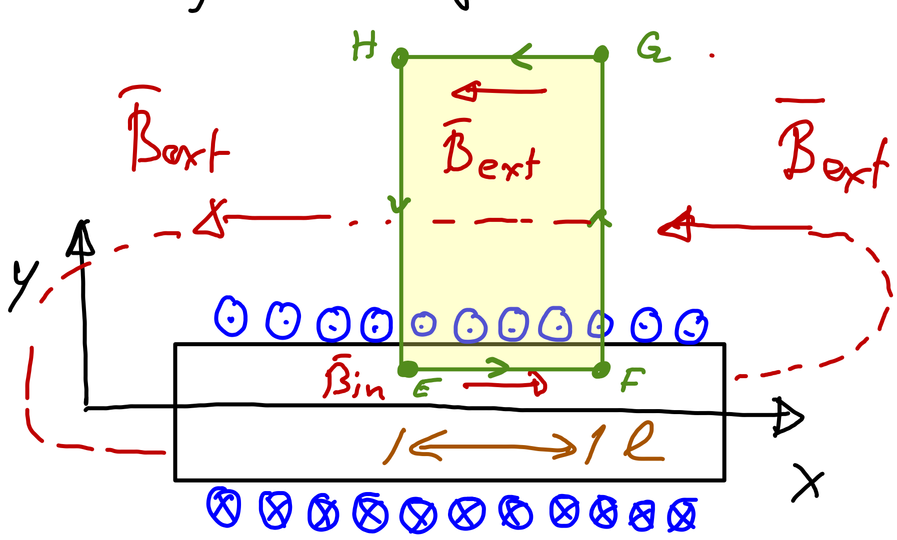
La configuración es equivalente a la que crea la superposición de N espiras de radio R por las que circula una corriente I_c idéntica. El esquema muestra la sección transversal del solenoide, donde las líneas del campo $\vec{B}$ son cerradas.



Si aislamos una de las espiras (ver dibujo) vemos que la superposición suma los campos en el centro y fuera tienen signos opuestos.

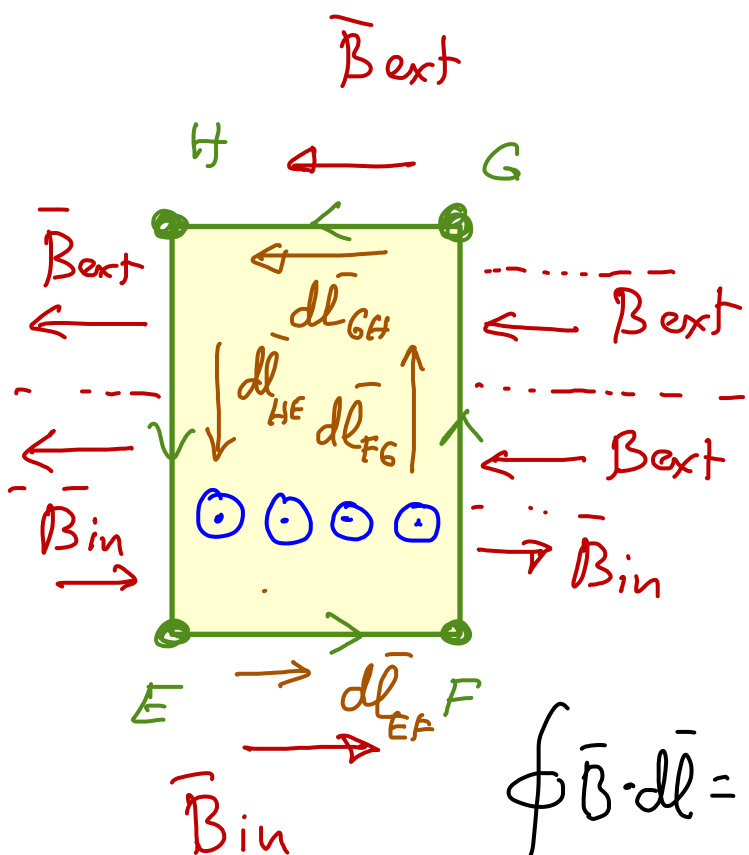


Fuera del solenoide el campo es mucho menor y con sentido contrario ya que los campos $\bar{B}_1$ y $\bar{B}_2$ tienen sentidos opuestos.



El solenoide tiene N espiras y longitud L de modo que $n = N/L$ es el número de vueltas de hilo por unidad de longitud.

Aplicamos la ecuación de Ampère al circuito EFGH (relleno en amarillo) donde la distancia $|\overline{EF}| = |\overline{GH}| = \ell$ es mucho más pequeña que $|\overline{HE}| = |\overline{FG}| >> \ell$. Se tiene



$$\oint_{EFGH} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (n I_c)\times \ell = \mu_0 \frac{N}{L}\ell I_c$$

ver nota al final.

$$\oint_{EFGH} \vec{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 \frac{N\ell}{L} I_c$$

y ahora desarrollamos la integral

$$\oint_{EFGH} \bar B\cdot d\bar\ell = \int_E^F \bar B_{in}\cdot d\bar\ell_{EF} + \int_F^G \bar B\cdot \cancel{d\bar\ell_{FG}}\,0 + \int_G^H \bar B_{ex}\cdot d\bar\ell_{GH} + \int_H^E \bar B\cdot d\vec\ell_{HE}$$

$\bar B_{in} \parallel d\vec\ell_{EF}$

$\vec B \perp d\bar\ell_{FG}$ tanto dentro como fuera del solenoide

$\vec B_{ext} \parallel d\vec\ell_{GH}$ dentro del solenoide

$d\bar\ell_{HE} \perp \bar B$ tanto dentro como

En los tramos HE y FG los campos $\bar B_{ex}$ y $\bar B_{in}$ son perpendiculares respectivamente a $d\bar\ell_{HE}$ y $d\bar\ell_{FG}$ (ver dibujo) ya que las líneas de campo son siempre normales a dichos segmentos.

En EF el campo $\vec B_{in}$ es paralelo a $d\bar\ell_{EF}$ y en GH también $\bar B_{ext}$ lo es a $d\bar\ell_{GH}$ y queda entonces.

$$\oint_{EFGH} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_{in}\Big(\underbrace{\int_E^F dl_{EF}}_{=\ell}\Big) + B_{ext}\Big(\underbrace{\int_G^H dl_{EH}}_{=\ell}\Big) = \mu_0 \frac{N\ell}{L} I_c$$

$$B_{in}\cancel{\ell} + B_{ext}\cancel{\ell} = \mu_0 \frac{N}{L}\cancel{\ell} I_c$$

Como $|\overline{FG}| = |\overline{HE}| \gg \ell$ y el campo B_{ext} decrece con la distancia al solenoide, podemos considerar

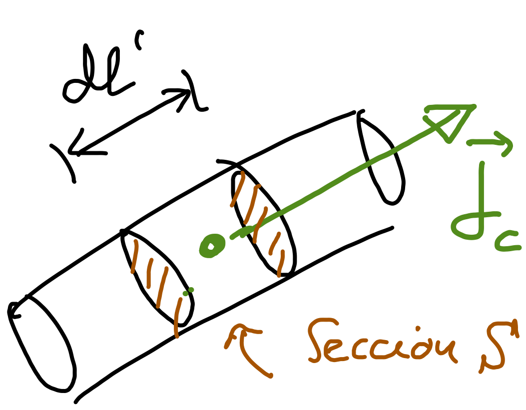
$B_{in} \gg B_{ex}$ y entonces $B_{in} \simeq \mu_0 \frac{N}{L} I_c$

$$B_{in} = \mu_0 \frac{N}{L} I_c = \mu_0 n I_c$$

NOTA: El signo de las corrientes se obtiene de la definición

$\frac{dQ}{dt} = I_c = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ En el caso de un hilo conductor con una sección S constante podemos hacer

$|\vec{J}| = \frac{I_c}{S}$ y su dirección y sentido son las de el elemento de circuito $d\vec{l}'$ como muestra el dibujo. El vector $\vec{J}_c$ está definido como



$$\vec{J}_c = \begin{cases} \frac{|I_c|}{S}\vec{t} & \text{dentro de la sección } S \\ 0 & \text{fuera de la sección} \end{cases}$$

de modo que la integral del teorema de Ampère es

$$I = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s} = \int_S \left[\frac{|I_c|}{S} \vec{t} \right] \cdot [d\vec{S}] = \frac{I_c}{S} \int_S (\vec{t} \cdot \vec{n})\, ds$$

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot ds$$

Sólo esta definida en la sección de conducto. En los recintos ABCD y EFGH anteriores $d\vec{S} = ds\,\vec{k}$ y el vector tangente $\vec{t}$ que los atraviesa es paralelo a $\vec{k}$

$$\begin{cases} \text{En } \odot \quad \vec{t} = \vec{k} \rightarrow d\vec{S} \cdot \vec{k} = ds > 0 \\ \text{En } \otimes \quad \vec{t} = -\vec{k} \rightarrow d\vec{S} \cdot (-\vec{k}) = -ds < 0 \end{cases}$$

Para cada $\odot$ tendremos una corriente positiva I_c y por cada $\otimes$ otra negativa de modo que para el recinto EFGH anterior $I_{TOT} = n\ell I_c$