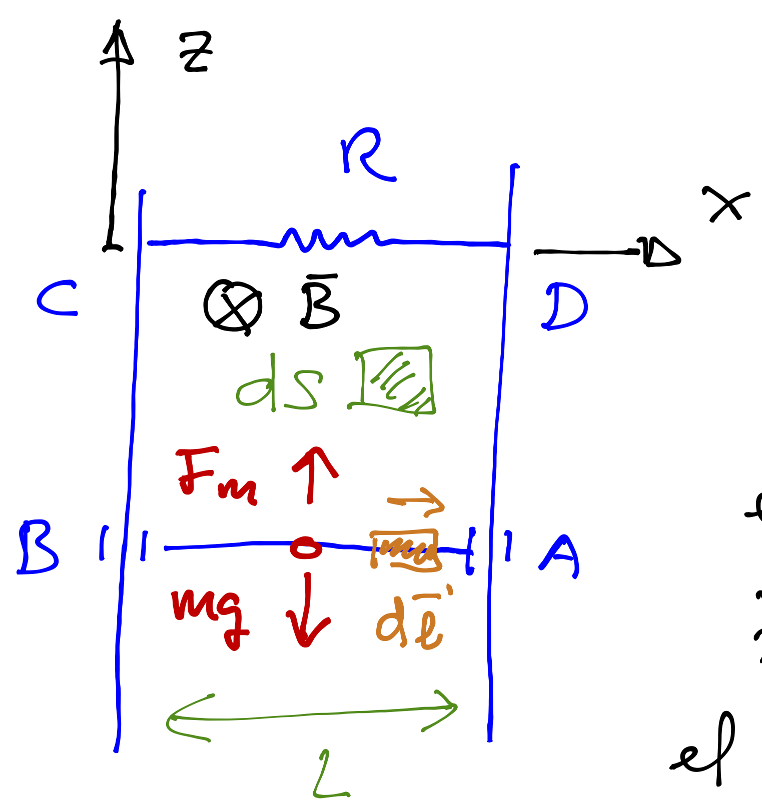
Todas las barras metálicas tienen una resistencia eléctrica despreciable menos el tramo AB con resistencia R.

Prob: 9.4



El circuito ABCD forma una espira cuya área aumenta a medida que AB cae.

El campo $\bar{B} = B_0 \vec{j}$ es cte en el tiempo pero su flujo Φ a través del área ABCD cambia con el movimiento de la varilla AB.

Según la ley de Faraday ha de aparecer en la espira una fuerza electromotriz $\mathcal{E}_m$ que induce una corriente $I = \mathcal{E}_m / R$ que ha de oponerse al movimiento de la barra. Para ello la fuerza $d\bar{F}_m = I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ ha de oponerse a $-mg\vec{k}$ y si la calculamos

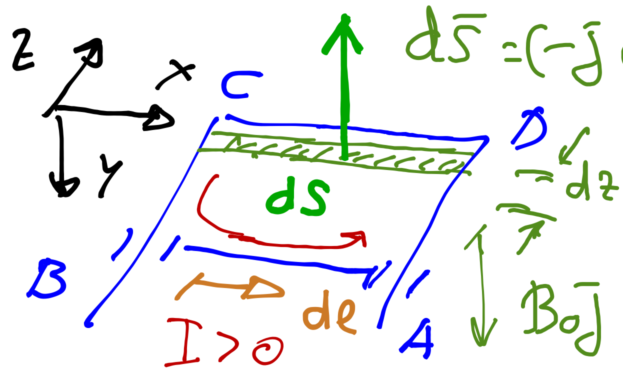
$$\left.\begin{array}{l} d\vec{\ell} = dx\, \vec{i} \\ \bar{B} = B_0 \vec{j} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d\bar{F}_m = I\, (dx\, \vec{i}) \wedge (B_0 \vec{j}) \\ d\vec{F}_m = I\, dx\, B_0 (\vec{i} \wedge \vec{j}) = I\, dx\, B_0 \vec{k} \end{array}$$

$$\vec{F}_m = I B_0 \int_0^L dx\, \vec{i} = I B_0 L\, \vec{i}$$

[1]

$I < 0$ para que la fuerza F_m se apoye a la gravedad

En el dibujo se muestra como tomar $d\bar{S}' = -\vec{j}\,ds$ siendo $ds = L\,dz$ para que sea coherente con el sentido de $d\bar{\ell} = dx\,\vec{i}$. Es importante para determinar el sentido de la corriente. Como la superficie tiene dos posibles vectores normales también



podíamos tomar $d\bar{\ell} = dx\,\vec{i}$ y $d\bar{S} = -\vec{j}\,ds = (-L\,dz)\,\vec{j}$

Calculamos la fuerza electromotriz empleando la ley de Faraday

$$\mathcal{E}_m = -\int_S \cancel{\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}_{\to 0} \cdot d\bar{S}' + \oint_C (\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot d\vec{\ell}' = \int_A^B (\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{\ell}$$

$\bar{B}$ es cte

Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = u_z\,\vec{k} \\ \bar{B} = B_0\,\vec{j} \\ d\bar{\ell} = dx\,\vec{i} \end{array}\right\} \quad \mathcal{E}_m = \int_A^B [(u_z\,\vec{k}) \wedge (B_0\,\vec{j})] \cdot (dx\,\vec{i})$$

$$\mathcal{E}_m = \int_A^B [u_z B_0 \underbrace{(\vec{k} \wedge \vec{j})}_{= -\vec{i}}] \cdot (dx\,\vec{i})$$

$$\mathcal{E}_m = -\int_A^B u_z B_0\,dx = -u_z B_0 L > 0 \quad [2]$$

$$\mathcal{E}_M = IR \rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{V B_0 L}{R}}$$

y si introducimos esta corriente en Fm tendremos

$\vec{F}_m = I B_0 L = -\frac{v B_0^2 L^2}{R} \vec{v}$ y la ecuación de movimiento para el centro de masas de la barra es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{v B_0^2 L^2}{R} - mg \qquad \frac{dv}{dt} = -\left[\frac{v B_0^2 L^2}{RM} + g\right]$$

Si hacemos el cambio de variable $s = \frac{B_0^2 L^2}{mR} v + g$

entonces $\frac{ds}{dt} = \frac{B_0^2 L^2}{mR}\frac{dv}{dt}$ y sustituyendo

$$\left(\frac{mR}{B_0^2 L^2}\right)\frac{ds}{dt} = -s \qquad \frac{ds}{dt} = -\left(\frac{B_0^2 L^2}{mR}\right) s = -\frac{s}{\tau_0}$$

pues $\left(\frac{mR}{B_0^2 L^2}\right) = \tau_0$ tiene que tener unidades de tiempo y la solución es $s = s_0 e^{-t/\tau_0}$ $s_0 = s(0)$

y si deshacemos el cambio de variable

$$s(t) = \frac{B_0^2 L^2}{mR} v + g = \left[\frac{B_0^2 L^2}{mR} v(0) + g\right] e^{-t/\tau_0}$$

$v(0) \to 0$ En el instante inicial la velocidad de la barra es nula

$$\frac{B_0^2 L^2}{mR} v(t) + g = g e^{-t/\tau_0} \to \frac{B_0^2 L^2}{mR} v(t) = g\left(e^{-t/\tau_0} - 1\right)$$

$$v(t) = \left(\frac{mRg}{B_0^2 L^2}\right)\left[e^{-t/\tau_0} - 1\right] = \left(\frac{g}{\tau_0}\right)\left[e^{-t/\tau_0} - 1\right]$$

Esta solución cumple las condiciones impuestas pues en $t=0$ $\quad V(0) = \frac{g}{\tau_0}[1-1] = 0$

y cuando $t \to \infty$ $\quad e^{-t/\tau_0} \to 0$ y se tiene

$$V(\infty) = \frac{g}{\tau_0}(0-1) = -\frac{g}{\tau_0}$$

Luego al cabo del tiempo la barra cae con una velocidad constante

$$\vec{V} = -\frac{g}{\tau_0}\vec{k} = -\frac{mRg}{B_0^2 L^2}\vec{k}$$

con esta velocidad podemos determinar el sentido de la corriente inducida en el estado estacionario

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{V B_0 L}{R} = -\left[-\frac{mg\cancel{R}}{B_0^2 L^2}\right] \times \frac{B_0 L}{\cancel{R}}$$

$$I = -\frac{mg}{B_0 L}$$

Esta corriente representa (por convenio) el movimiento de las cargas positivas que se mueven desde $B \to A$ con el vector $d\vec{\ell}$ y $d\vec{S}$ que hemos escogido. en el último dibujo.

Si nos preguntan por el movimiento de las cargas negativas (electrones) sería el opuesto $A \to B$

Podríamos también calcular la fuerza electromotriz empleando la ley de Faraday de la forma

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{donde} \quad \Phi = \int_S \overline{B} \cdot d\vec{S}$$

y siendo coherente con el último dibujo

$\overline{B} = B_0 \vec{J}$ $\quad d\vec{S} = -\vec{J}\, ds = (-\vec{J})\, L\, dz$ y la integración la hacemos entre $z=0$ y una altura $z(t)$ en un instante genérico.

$$\Phi = \int_S \overline{B} \cdot d\overline{S} = \int_{z=0}^{z(t)} (B_0 \vec{J}) \cdot \underbrace{(-L\, dz\, \vec{J})}_{(-ds\,\vec{J})} = -LB_0 \int_z^0 dz$$

0 ← Posición inicial $z=0$

z ← posición en un instante genérico

luego $\Phi = -LB_0 [\, 0 - z\,] = LB_0 z$

Tendremos;

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi}{dt} = -LB_0 \frac{dz}{dt} = -LB_0 u_z$$

Es lo mismo que tenemos en la ec. [2]

que es lo que encontramos antes. El resto de los cálculos del problema al sustituirlo en la ec. [1]

NOTA: El sentido de la corriente $I(t)$ depende del triedro que hemos tomado, pues los signos de las magnitudes han de ser coherentes con el convenio de signos que hemos tomado. Es decir, que $I(t) > 0$ según miremos la espira de uno u otro lado.