2.- Análisis Vectorial

- **Problema 2.1**

Dado el campo escalar $\phi = A\,x$ con A constante, se pide:

a) Representar gráficamente las superficies equipotenciales.
b) Calcular el gradiente de ϕ y representarlo gráficamente.
c) La derivada direccional de ϕ en las siguientes direcciones:

$$\begin{array}{lll} (1)\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} & (2)\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{j} & (3)\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \\ (4)\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} & (5)\ \ \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} & (6)\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \end{array}$$

d) Calcular $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ y $\nabla \times (\nabla\phi)$

Solución :

$$\begin{array}{ll} \text{(b)} & \nabla\phi = A\,\boldsymbol{i} \\ \text{(c)} & 1)\ \ A\ \ ;\ \ 2)\ \ 0\ \ ;\ \ 3)\ \ 0 \\ & 4)\ \ A/\sqrt{2}\ \ ;\ \ 5)\ \ -A/\sqrt{2}\ \ ;\ \ 6)\ \ A/\sqrt{3} \\ \text{(d)} & \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0\ \ ;\ \ \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \end{array}$$

- **Problema 2.2**

Repetir el problema anterior para los campos escalares.

a) $\phi = A + B\,x^2$
b) $\phi = C\,\left(x^2 + y^2\right)$

donde A, B y C son constantes.

Solución :

(a) $\nabla\phi = 2\,B\,x\,\boldsymbol{i}$

$$\begin{array}{l} (1)\ \ 2\,B\,x\ \ ;\ \ (2)\ \ 0\ \ ;\ \ (3)\ \ 0\ \ ;\ \ (4)\ \ \sqrt{2}\,B\,x\ \ ;\ \ (5)\ \ -\sqrt{2}\,B\,x\ \ ;\ \ (6)\ \ 2\,\sqrt{3}\,B\,x/3 \\ (7)\ \ \nabla \cdot (\nabla\phi) = 2\,B\ \ ;\ \ (8)\ \ \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \end{array}$$

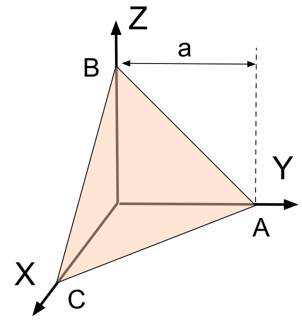
(b) $\nabla\phi = C\,\left(2\,x\,\boldsymbol{i} + 2\,y\,\boldsymbol{j}\right)$

$$\begin{array}{l} (1)\ \ 2\,C\,x\ \ ;\ \ (2)\ \ 2\,C\,y\ \ ;\ \ (3)\ \ 0\ \ ;\ \ (4)\ \ C\,\sqrt{2}\,(x+y)\ \ ;\ \ (5)\ \ C\,\sqrt{2}\,(-x+y) \\ (6)\ \ \dfrac{2\,\sqrt{3}}{3}\,C\,(x+y)\ \ (7)\ \ \nabla \cdot (\nabla\phi) = 4\,C\ \ ;\ \ (8)\ \ \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \end{array}$$

- **Problema 2.3**

Para el campo vectorial,

$$\boldsymbol{e} = (D\,x)\,\boldsymbol{i} + (2 - H\,y\,z)\,\boldsymbol{j} + (\frac{H\,z^2}{2} - 1)\boldsymbol{k}$$



donde D y H son constantes se pide calcular:

a) Su divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{e}$
b) Su rotacional $\nabla \times \boldsymbol{e}$
c) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{e})$ en el punto (a, a, a) del espacio con $a > 0$.
d) El flujo del campo $\boldsymbol{e}$ a través de una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $3\,a$
e) El flujo de $\boldsymbol{e}$ a través del la superficie del triángulo ABC de la figura con vértices en los puntos $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ y $(a, 0, 0)$.

Solución :

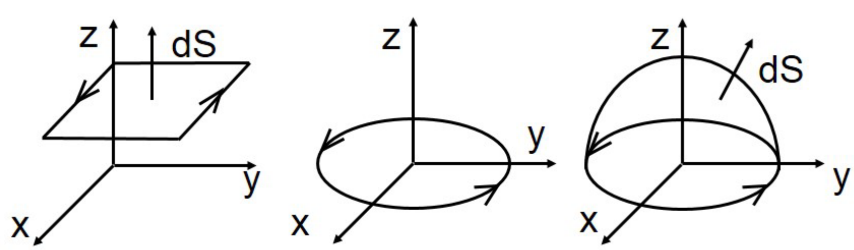
(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{e} = D$; (b) $\nabla \times \boldsymbol{e} = H\,y\,\boldsymbol{i}$; (c) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{e}) = -H\,\boldsymbol{k}$
(d) $\phi = 36\,D\,\pi\,a^3$; (e) $\phi = D\,a^3/6 + a^2/2$

- **Problema 2.4**

Se pide calcular para el campo vectorial,

$$\boldsymbol{A} = 2\,x\,z\,\boldsymbol{i} + (z\ \mathrm{sen}\,x)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\,\boldsymbol{k}$$

a) El valor de la circulación de $\nabla \times \boldsymbol{A}$ a lo largo del cuadrado de lado 2 paralelo al plano (X, Y) situado en $z = 2$ y recorrido en el sentido que se indica en la figura.
b) La circulación de $\boldsymbol{A}$ a lo largo de la circunferencia de radio 2 situada sobre el plano (X, Y) y centrada en el origen de coordenadas con el sentido indicado.
c) El flujo de $\nabla \times \boldsymbol{A}$ a través de la superficie del cuadrado definido en el primer apartado.
d) El flujo de $\boldsymbol{A}$ a través de la semiesfera de radio $R = 2$ centrada en el origen que se apoya en la circunferencia del segundo apartado (ver figura).



Solución :

(a) $C = -8$; (b) $C = 0$; (c) $\phi = 4\ \mathrm{sen}\,2$; (d) $\phi = 8\,\pi$

- **Problema 2.5**

Calcular la integral de línea de los siguientes campos vectoriales,

$$\boldsymbol{a} = (x^2\, y)\, \boldsymbol{i} + x^5\, \boldsymbol{j} + x^{-1}\, \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b} = (2\, x\, y)\, \boldsymbol{i} + x^2\, \boldsymbol{j}$$

desde el origen $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,4,0)$ a lo largo de las curvas:

1. $y = 4\,x \quad ; \quad z = 0$
2. $y = 4\,x^2 \quad ; \quad z = 0$

Solución :

$$(1)\quad I_a = 5/3 \;\;;\;\; I_b = 4$$

$$(2)\quad I_a = 68/35 \;\;;\;\; I_b = 4$$

- **Problema 2.6**

Para el campo vectorial,

$$\boldsymbol{c} = (A\, x)\, \boldsymbol{i} + (B\, y^2)\, \boldsymbol{j} + (C\, z)\, \boldsymbol{k}$$

donde A, B y C son constantes, se pide calcular su integral de línea desde el origen $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,1,1)$ a lo largo de:

a) La recta $\quad y = x \quad ; \quad z = x$
b) La curva $\quad y = x^2 \quad ; \quad z = x^3$

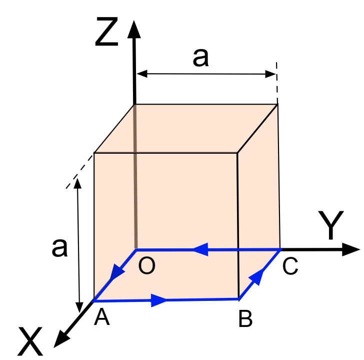
Solución :

$$(a)\quad I_a = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2} \;\;;\;\; (b)\quad I_b = \frac{3A + 2B + 3C}{6}$$

- **Problema 2.7**

Para el campo vectorial $\boldsymbol{g} = H\, y^2\, \boldsymbol{i}$ siendo H una constante se pide:

a) Calcular $\nabla \cdot \boldsymbol{g}$, $\quad \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) \quad \nabla \times \boldsymbol{g}$.
b) Comprobar el teorema de la divergencia para el cubo de lado a de la figura.
c) Comprobar el teorema de Stokes en el cuadrado de lado a de la figura recorrido en el sentido $OABO$.



Solución :

$$(a)\quad \nabla \cdot \boldsymbol{g} = 0 \;\;;\;\; \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) = 0 \;\;;\;\; \nabla \times \boldsymbol{g} = -2\, H\, y\, \boldsymbol{k}$$

$$(b)\quad \oint \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{s} = \int (\nabla \cdot \boldsymbol{g})\, dV = 0$$

$$(c)\quad \oint \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{l} = \int (\nabla \times \boldsymbol{g}) \cdot d\boldsymbol{s} = -H\, a^3$$

- **Problema 2.8**

Para el campo vectorial $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$ donde el escalar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de un punto del espacio al origen y $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ el vector unitario radial en coordenadas esféricas calcular:

a) El gradiente $\nabla\, r$
b) La divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$
c) El gradiente $\nabla\,(1/r)$
d) La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/r)$

Solución :

$$\text{(a)}\quad \nabla\, r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; \text{(b)}\quad \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3 \;\; ; \;\; \text{(c)}\quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; \text{(d)}\quad \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \; si \; r \neq 0.$$

- **Problema 2.9**

Para el campo vectorial $\boldsymbol{\rho} = \rho\,\boldsymbol{u}_\rho$ siendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia de un punto del espacio al eje Z y $\boldsymbol{u}_\rho = (\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j})$ el vector unitario radial en coordenadas cilíndricas, donde $\operatorname{sen}\varphi = y/\rho$ y $\cos\varphi = x/\rho$ calcular:

a) El gradiente $\nabla\,\rho$
b) La divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}$
c) El gradiente $\nabla\,(1/\rho)$
d) La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/\rho)$

Solución :

$$\text{(a)}\quad \nabla\,\rho = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} = \boldsymbol{u}_\rho \;\; ; \;\; \text{(b)}\quad \nabla \cdot \boldsymbol{\rho} = 2 \;\; ; \;\; \text{(c)}\quad \nabla\,(\frac{1}{\rho}) = -\frac{1}{\rho^2}\,\boldsymbol{u}_\rho \;\; ; \;\; \text{(d)}\quad \nabla \cdot \nabla(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{\rho^3}$$