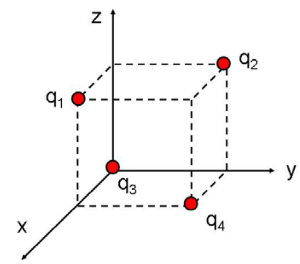
# 3.- Electrostática del vacío

- **Problema 3.1**

Cuatro cargas eléctricas puntuales de valores $q_1 = q_2 = 1\,\mu\,\mathrm{C}$ y $q_3 = q_4 = -1\,\mu\,\mathrm{C}$, se sitúan en cuatro de los vértices de un cubo de arista $a = 3m$ como se muestra en la figura. Determínese:




a) El valor del campo electrostático creado por las cargas $q_1, q_2$ y $q_4$ en el origen de coordenadas.
b) La fuerza electrostática que actúa sobre la carga $q_3$.

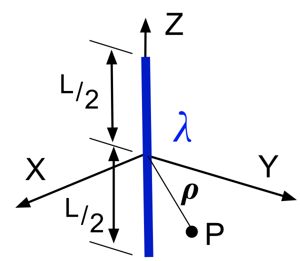
**Solución :**

a) $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{k}\,10^3\,\mathrm{V/m}$ .
b) $\boldsymbol{F} = 5\sqrt{2}\;10^{-4}\,\boldsymbol{k}\,\mathrm{N}$.

---

- **Problema 3.2**

Un hilo rectilíneo de longitud $L$, situado sobre el eje $OZ$ como muestra la figura, se encuentra cargado uniformemente con una carga total $Q$.




a) Calcular el potencial y el campo electrostáticos en un punto $P$ del espacio a una distancia $\rho = r$ del centro del hilo.
b) Obtener el potencial $V$ si el punto $P$ es un punto cualquiera del espacio (úsense coordenadas cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$ tomando el centro geométrico del hilo en el origen del sistema de referencia). c) ¿Puede obtenerse del potencial $V$ el campo electrostático en todo punto del espacio?

**Solución :**

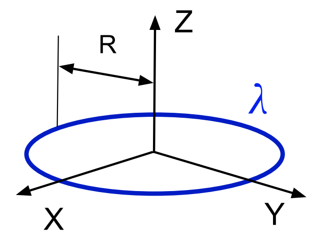
a) $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{2\pi\,\varepsilon_o\,\rho\,\sqrt{L^2 + 4\,\rho^2}}\boldsymbol{u}_\rho \;\;;\;\; V(\rho) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\,\ln\dfrac{L + \sqrt{L^2 + 4\rho^2}}{2\rho}$

b) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,L}\,\ln\left[\dfrac{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2} - (z - L/2)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2} - (z + L/2)}\right]$

c) Sí, se tiene ya V en todo punto, por simetría cilíndrica: $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho}\,\boldsymbol{u}_\rho - \dfrac{\partial V}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$

- **Problema 3.3**

El anillo de radio $R$ de la figura está sobre el plano $z = 0$ con centro en el origen, almacena una carga neta $Q$ uniformemente distribuida. Hallar el potencial y el campo electrostáticos creados por el anillo de carga en un punto cualquiera $P$ del eje $Z$.



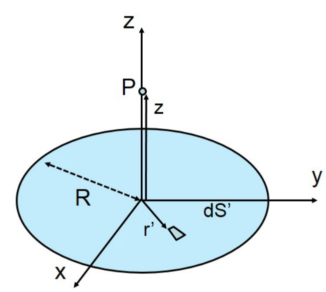

**Solución :**

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q\, z\, \boldsymbol{k}}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \quad ; \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (R^2+z^2)^{1/2}}$$

---

- **Problema 3.4**

Un disco circular de radio $R$ se halla cargado con distribución superficial de carga uniforme de densidad $\sigma$. El disco de carga tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano $z = 0$ como se muestra. Se pide:




a) El valor del campo y potencial electrostáticos en todo punto del eje $Z$.
b) El trabajo realizado por el campo creado por esta distribución para llevar una carga puntual $q$ desde el punto $(0, 0, -b)$ hasta el punto $(0, 0, b)$.

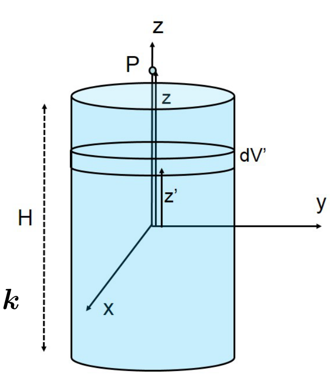
**Solución :**

a) $E(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \dfrac{z}{|z|}\right) \quad ; \quad V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$
b) $W = 0$

---

- **Problema 3.5**

El cilindro de radio $R$ y altura $H$ que muestra la figura alberga la carga estática $Q$ distribuida uniformemente por todo su volumen. Hállese el campo electrostático creado por este volumen de carga en un punto genérico del eje $Z$ exterior al cilindro.




**Solución :**

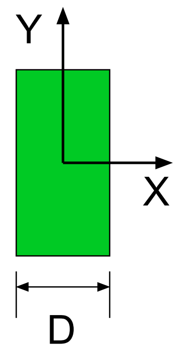
$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 H}\left(H + \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{H}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{H}{2}\right)^2}\ \right)\boldsymbol{k}$$

- **Problema 3.6**

La figura adjunta muestra el esquema de una distribución infinita de carga que ocupa todo el volumen comprendido entre los planos $x = -D/2$ y $x = D/2$ del espacio. La carga está almacenada con distribución volumétrica de carga dada por la relación

$$\rho = 2\rho_0 \frac{|x|}{D} \qquad \left(-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}\right)$$

Hállese el campo y el potencial electrostáticos en todo punto del espacio en función de $x$, considerando que el potencial en nulo para $x = 0$.




**Solución :**

$$0 < x < D/2 \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, x^2}{D\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i} \qquad ; \qquad V = -\frac{\rho_o\, x^3}{3\,\varepsilon_o\, D}$$

$$D/2 < x < 0 \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\rho_o\, x^2}{D\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i} \qquad ; \qquad V = \frac{\rho_o\, x^3}{3\varepsilon_o\, D}$$

$$x > D/2 \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, D}{4\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i} \qquad ; \qquad V = \frac{\rho_o\, D}{4\varepsilon_o}\left(\frac{D}{3} - x\right)$$

$$x < -D/2 \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\rho_o D}{4\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i} \qquad ; \qquad V = \frac{\rho_o\, D}{4\varepsilon_o}\left(\frac{D}{3} + x\right)$$

- **Problema 3.7**

Determinar en todas las regiones del espacio el campo y potencial electrostáticos creados por una esfera de radio $R$ y carga neta $Q$ que se distribuye como en los tres casos siguientes:

a) Uniformemente sólo sobre la *superficie* de la esfera (en su interior hay vacío).
b) De modo uniforme por todo el *volumen* de la esfera.
c) Con distribución densidad volumétrica $\rho = k\,r$, donde $k$ es una constante a determinar en función de $Q$ y $R$.

**Solución :**

a) Esfera de carga con densidad superficial $\sigma_o = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

$$r < R \quad \boldsymbol{E} = 0 \qquad\qquad V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,R} = \frac{\sigma_o\,R}{\varepsilon_o}$$

$$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \qquad\qquad V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r}$$

b) Esfera de carga con densidad constante $\rho_o = \dfrac{3\,Q}{4\pi\,R^3}$

$$r < R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q\,r}{4\pi\,\varepsilon_o\,R^3}\,\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o}\boldsymbol{r} \qquad\qquad V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

$$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad ; \quad V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r}$$

c) Esfera de carga con densidad variable y carga neta $Q = \pi\,k\,R^4$

$$r < R \quad \boldsymbol{E} = \frac{k\,r^2}{4\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \qquad\qquad V = \frac{k}{12\,\varepsilon_o}\,(4R^3 - r^3)$$

$$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{k\,R^4}{4\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \qquad\qquad V = \frac{k\,R^4}{4\,\varepsilon_o\,r}$$

• **Problema 3.8**

Hállese el campo y el potencial electrostáticos debidos a la carga almacenada en un cilindro de radio $R$ y suficientemente largo para considerar su altura infinita, cuyo eje yace sobre el eje $Z$. La carga se distribuye con densidad volumétrica de carga contante $\rho_o$. Considérese nulo el potencial para $r = R$, siendo $r$ la variable radial $\rho$ de las coordenadas cilíndricas.

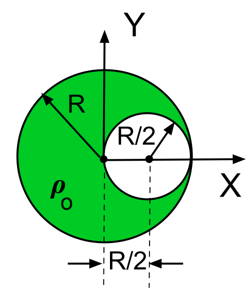
**Solución :**

$$r < R \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, r}{2\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{u}_r \qquad ; \qquad V = \frac{\rho_o}{4\,\varepsilon_o}\,(R^2 - r^2)$$

$$r > R \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, R^2}{2\,\varepsilon_o\, r}\,\boldsymbol{u}_r \qquad ; \qquad V = \frac{\rho_o\, R^2}{2\,\varepsilon_o}\,\ln\frac{R}{r}$$

---

• **Problema 3.9** Una esfera de radio $R$ con centro en el origen está cargada uniformemente con densidad de carga volumétrica $\rho_o$, excepto en el hueco excéntrico de radio $R/2$ que muestra la figura. Calcular el campo electrostático $\boldsymbol{E}$ creado por la distribución de carga en todos los puntos del espacio.
(En clase basta dar el procedimiento de resolución y dejar indicadas las expresiones matemáticas. Comparar con el problema siguiente.)




**Solución :**

Siendo $\boldsymbol{r}_h = \boldsymbol{r} - \frac{R}{2}\boldsymbol{i}$, y $r_h = |\boldsymbol{r}_h| = \sqrt{(x - R/2)^2 + y^2 + z^2}$, se tiene:

En interior del hueco: $$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{r} - \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{r}_h = \frac{\rho_o R}{6\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i}$$

En la zona con carga: $$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{r} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3\,\varepsilon_o}\,\frac{\boldsymbol{r}_h}{r_h^3}$$

En la zona exterior: $$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o R^3}{3\,\varepsilon_o}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3\,\varepsilon_o}\,\frac{\boldsymbol{r}_h}{r_h^3}$$

- **Problema 3.10**

Tres cargas puntuales de valores $q, 2q$ y $3q$ se encuentran situadas en los puntos $P_1(0,0,a)$, $P_2(0,a,0)$ y $P_3(a,0,0)$, respectivamente. Se pide:

a) Calcular la energía electrostática $U_e$ del sistema.
b) Energía potencial electrostática $E_p$, debida al campo creado por las tres cargas, de una carga carga puntual $Q$ que se situara en el origen.
c) Energía electrostática $U_e'$ de la nueva distribución creada al añadir $Q$.

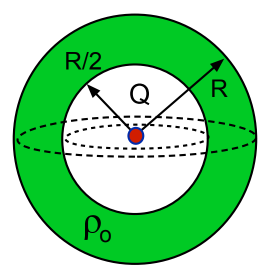
**Solución :**

$$\text{a)} \quad U_e = \frac{11\sqrt{2}\,q^2}{8\pi\,\varepsilon_o\,a}$$
$$\text{b)} \quad E_p = Q\,\frac{3\,q}{2\pi\,\varepsilon_o\,a}$$
$$\text{a)} \quad U_e' = U_e + E_p$$

---

- **Problema 3.11**

La distribución de carga de la figura consta de una carga puntual $Q$ en el origen y una corteza esférica con densidad volumétrica de carga $\rho_o$ uniforme de radios interior $R/2$ y exterior $R$. Calcular la energía electrostática $U_e$ del sistema. (Sugerencia: *puede ser útil determinar el potencial electrostático del campo creado por la distribución continua de carga de la corteza*).




**Solución :**

$$U_e = \frac{3\,Q\,\rho_o\,R^2}{8\,\varepsilon_o} + \frac{47\,\pi\,\rho_o^2\,R^5}{240\,\varepsilon_o}$$