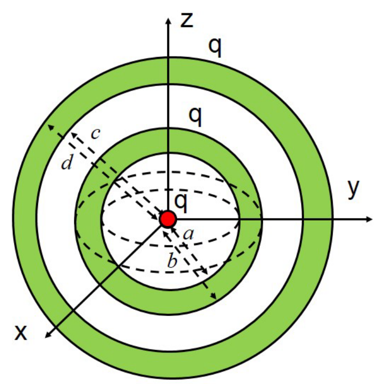
4.- Electrostática de materiales conductores

• **Problema 4.1**

Una carga puntual q está situada en el centro geométrico de dos cortezas esféricas metálicas conductoras que contienen a su vez una carga q como se muestra en la figura. La corteza interior tiene radios a y $b > a$, la exterior $c > b$ y $d > c$. Se pide determinar:

1) La distribución de la carga eléctrica en cada corteza esférica.
2) El campo y potencial eléctricos en todo punto del espacio.



Solución :

1) $\sigma_a = -\dfrac{q}{4\pi a^2} \quad \sigma_b = \dfrac{2q}{4\pi b^2} \quad \sigma_c = -\dfrac{2q}{4\pi c^2} \quad \sigma_d = \dfrac{3q}{4\pi d^2}$

2) Coordenadas esféricas:

$$r > d \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3q}{r}$$

$$d > r > c \qquad \boldsymbol{E} = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3q}{d}$$

$$d > r > b \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{r} - \frac{2q}{c}\right)$$

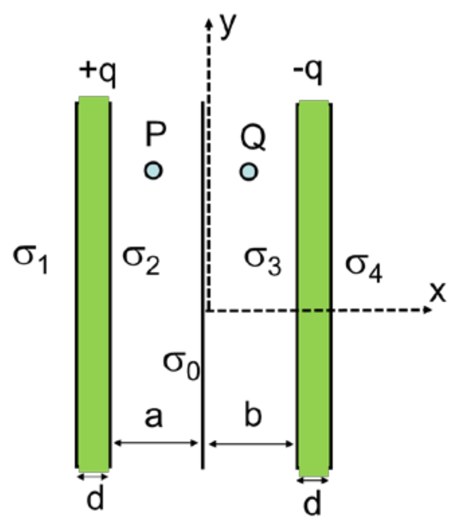
$$b > r > a \qquad \boldsymbol{E} = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{b} - \frac{2q}{c}\right)$$

$$a > r \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{b} - \frac{2q}{c} + \frac{q}{r} - \frac{q}{a}\right)$$

- **Problema 4.2**

Entre dos placas metálicas de espesor d con carga $+q$ y $-q$ se introduce una lámina de carga con densidad superficial σ_o y espesor despreciable como muestra la figura. La distribución de la carga eléctrica sobre las superficies metálicas uniforme y su superficie $S \gg= (a+b)^2$ muy grande. Se pide:

a) Determinar las densidades de carga sobre las superficies metálicas σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 de la figura.
b) Calcular el campo eléctrico en el espacio entre las placas (puntos P y Q de la figura) empleando el principio de superposición.
c) Verificar el resultado anterior empleando la ley de Gauss.
d) Calcular el potencial eléctrico $V(x)$ en todo punto del espacio, considerando que en $x = 0$ es nulo.



Solución :

$$\text{a)} \quad \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{\sigma_o}{2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{q}{S} - \frac{\sigma_o}{2} \quad ; \quad \sigma_3 = -\frac{q}{S} - \frac{\sigma_o}{2}$$

$$\text{b)} \quad \boldsymbol{E}(P) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i} \quad ; \quad \boldsymbol{E}(Q) = -\frac{\sigma_3}{\varepsilon_o}\,\boldsymbol{i}$$

$$\text{c)} \quad 0 < x < b \qquad V(x) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_o}\,x$$

$$b \leq x \leq d \qquad V(x) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_o}\,b$$

$$(b+d) < x \qquad V(x) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_o}\,b - \frac{\sigma_4}{\varepsilon_o}(x-b-d)$$

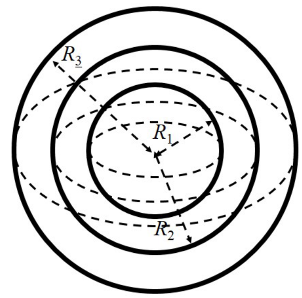
$$-a < x < 0 \qquad V(x) = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_o}\,x$$

$$-(a+d) \leq x \leq -a \qquad V(x) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o}\,a$$

$$x < -a \qquad V(x) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o}\,a + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_o}(x+a+d)$$

- **Problema 4.3**

En el sistema de la figura está formado por tres superficies metálicas esféricas concéntricas de radios $R_3 > R_2 > R_1$ y espesor despreciable. Se sabe que el campo eléctrico para $r > R_3$ es nulo y se pide:



a) Calcular la carga eléctrica de cada superficie si valor de del potencial eléctrico de cada una es $V_1 = V(R_1)$, $V_2 = V(R_2)$ y $V_3 = V(R_3)$ respectivamente.
b) Calcular la capacidad del sistema formado al conectar mediante un cable conductor la segunda y tercera superficie para formar un condensador esférico.
c) Calcular su energía electrostática para diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$.

Solución :

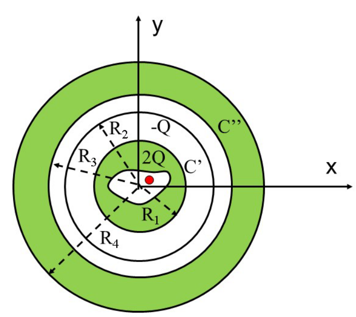
a) $$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o\, R_1\, R_2}{R_2 - R_1}\,(V_2 - V_1) \quad ; \quad q_2 = -q_1 + \frac{4\pi\varepsilon_o\, R_3\, R_2}{R_3 - R_2}\,V_2 \quad ; \quad q_3 = -(q_1 + q_2)$$

b) $$C = \frac{4\pi\varepsilon_o\, R_2\, R_1}{R_2 - R_1}$$

c) $$U_e = \frac{C}{2}\,(V_1 - V_2)^2$$

- **Problema 4.4**

Un conductor esférico C' de radio R_1 y con carga $2\,Q$ tiene un hueco en su interior que contiene una carga puntual Q, no necesariamente en su centro. Está rodeado por una distribución superficial de carga de concéntrica de radio R_2 y carga $-Q$ de espesor despreciable. Otro conductor C'' de radios R_3 y R_4 y carga neta nula se trae desde el infinito hasta alcanzar la disposición de la figura. Se pide calcular:



a) El valor del potencial eléctrico de los conductores C' y C''.
b) La energía necesario aportar para que el conductor C'' alcance la disposición indicada.

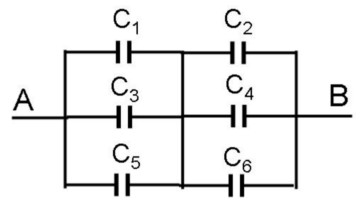
Solución :

a) $$V_{C'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_3} + \frac{2}{R_4}\right) \quad ; \quad V_{C''} = \frac{2\,Q}{4\pi\varepsilon_o\,R_4}$$

b) $$\Delta E = -U_e = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right)$$

- **Problema 4.5**

  Para la red de condensadores de la figura de pide determinar:



a) La capacidad equivalente entre los puntos A y B.
b) La energía electrostática del sistema en el supuesto del apartado anterior.
c) Indicar cómo se calcularía la carga estática de cada condensador conocida la diferencia de potencial $V_{AB} = V_o$.

Solución :

a) $$C_{AB} = \frac{(C_1 + C_3 + C_5)\,(C_2 + C_4 + C_6)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6}$$

b) $$U_e = \frac{1}{2}\,C_{AB}\,V_o^2$$