Prob : 2.2

a) Operamos como en el problema anterior

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} = 2Bx\vec{i}$$ El gradiente es una recta y para las derivadas direccionales se tiene

(1) $\nabla\phi\cdot\vec{i} = (2Bx\vec{i})\cdot\vec{i} = 2Bx$

(2) $\nabla\phi\cdot\vec{j} = 0$ (3) $\nabla\phi\cdot\vec{k} = 0$

(4) $\nabla\phi\cdot\vec{u} = (2Bx\vec{i})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}) = \sqrt{2}Bx$

(5) $\nabla\phi\cdot\vec{u} = (2Bx\vec{i})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j}) = -\sqrt{2}Bx$

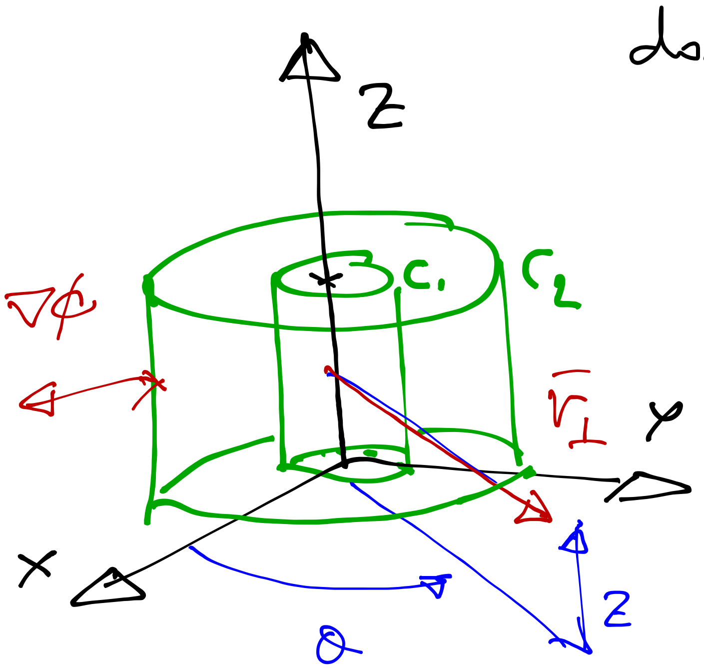
(6) $\nabla\phi\cdot\vec{u} = (2Bx\vec{i})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}Bx$

(7) $\nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}(2Bx) = 2B$

(8) $\nabla\wedge(\nabla\phi) = 0$

b) Para la función escalar $\phi = c(x^2+y^2)$ con $c>0$ las superficies con $\phi = c_j$ cte. son cilindros concéntricos con sus ejes alineados a lo largo del eje Z como muestra el dibujo. Su gradiente es,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} = c(2x\vec{i}+2y\vec{j}) = 2c\vec{r}_{\perp}$$




donde el vector $\vec{r}_\perp = x\vec{i} + y\vec{j}$ es perpendicular a la superficie de los cilindros con $\phi = c_j$ cte.

Se obtiene el mismo resultado empleando coordenadas cilíndricas ya que $\vec{r}_\perp = \vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\phi = c(x^2+y^2) = c|\vec{\rho}|^2 \qquad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho = \frac{\partial}{\partial\rho}[c\rho^2]\,\vec{u}_\rho$$

$$\nabla\phi = 2c\rho\,\vec{u}_\rho = 2c\vec{\rho}$$

El $\nabla\phi$ apunta en la dirección radial $\vec{u}_\rho \parallel \vec{r}_\perp$ y la derivada direccional a lo largo de un vector $\vec{u}$ unitario es $\dfrac{d\phi}{du} = \nabla\phi\cdot\vec{u}$ que en los casos que nos piden es:

$\bar{u}_\rho = \cos\theta\,\bar{i} + \operatorname{sen}\theta\,\bar{j}$

(1) $$\frac{d\phi}{du} = (2c\rho\,\vec{u}_\rho)\cdot\vec{i} = 2c\underbrace{\rho\cos\theta}_{x} = 2cx$$

(2) $$\frac{d\phi}{du} = (2c\rho\,\vec{u}_\rho)\cdot\bar{j} = 2c\overbrace{\rho\operatorname{sen}\theta}^{y} = 2cy$$

(3) $$\frac{d\phi}{du} = (2c\rho\,\bar{u}_\rho)\cdot\vec{k} = 0$$

(4) $$\frac{d\phi}{du} = (2c\rho\,\bar{u}_\rho)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{j}) = c\sqrt{2}\,(x+y)$$

(5) $\dfrac{d\phi}{du} = (2C\rho\,\overline{u}_\rho)\cdot\dfrac{(-\overline{i}+\overline{j})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,c\,(-x+y)$

(6) $\dfrac{d\phi}{du} = (2c\rho\,\overline{u}_\rho)\cdot\dfrac{(\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}c\,(x+y)$

(7) $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla\cdot\left[2c(x\overline{i}+y\overline{j})\right]$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = 2c\left[\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right] = 4c$$

Empleando coordenadas cilíndricas se tiene

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho(\nabla\phi)_\rho\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho(2c\rho)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[2c\rho^2\right] = \frac{2c}{\rho}(2\rho) = 4c$$

(8)

$$\nabla\wedge(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2cx & 2cy & 0 \end{vmatrix} = 0$$