Nos dan el campo vectorial

$$\vec{e} = \underbrace{Dx}_{e_x}\,\vec{i} + \underbrace{(2-Hyz)}_{e_y}\,\vec{j} + \overbrace{\left(\tfrac{1}{2}Hz^2-1\right)}^{e_z}\,\vec{k}$$

en donde H y D son constantes

Prob: 2.3

(1) $$\nabla\cdot\vec{e} = \frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} = D - Hz + (Hz) \;]$$

(2) $$\nabla\wedge\bar{e} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & 2-Hyz & \frac{Hz^2}{2}-1 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante

$$\nabla\wedge\bar{e} = \left[0-(-Hy)\right]\vec{i} - \left[0-0\right]\vec{j} + \left[0-0\right]\vec{k} = Hy\,\vec{i}$$

(3) $$\nabla\wedge(\nabla\wedge\bar{e}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Hy & 0 & 0 \end{vmatrix} = -H\vec{k}$$

otro modo: Como $\nabla\wedge(\nabla\wedge\bar{e}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{e}) - \nabla^2\bar{e}$

ya que $\nabla\cdot\bar{e} = D \rightarrow \nabla(\nabla\cdot\bar{e}) = 0$ y será

$$\nabla^2\bar{e} = (\nabla^2 e_x)\,\vec{i} + (\nabla^2 e_y)\,\vec{j} + (\nabla^2 e_z)\,\vec{k}$$ Donde para e_x

$$\nabla^2 e_x = \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2}$$ y lo mismo para las otras componentes.

Tendremos en este caso $\nabla^2 e_x = \nabla^2 e_y = 0$
y para la tercera componente

$$\nabla^2 e_z = \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2}}}_{0} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{2}Hz^2 - 1\right] = H$$

Resulta finalmente $\nabla^2 \vec{e} = \nabla^2 e_z \vec{k} = H\vec{k}$ luego

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{e}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{e}) - \nabla^2 \bar{e} = -H\vec{k}$$

(4) Tenemos que calcular $\phi = \int \vec{e} \cdot d\vec{S}$ sobre
sobre la superficie de una esfera de radio $R = 3a$
centrada en el origen.

Primero lo calculamos de un modo más directo empleando el teorema de la divergencia.

$$\int_{vol} \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \int_{sup} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \phi$$

donde podemos sustituir el valor de $\nabla \cdot \bar{e}$ anterior.

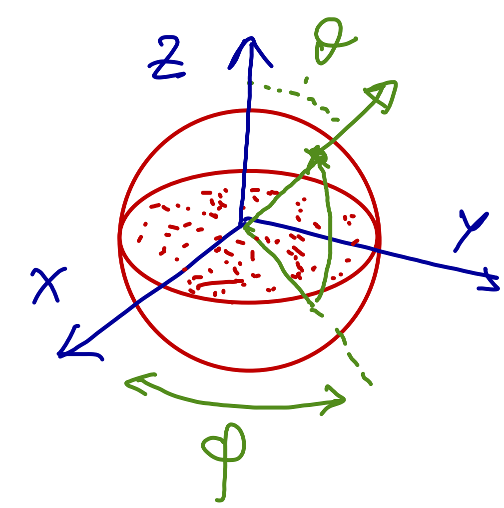
$$\phi = \int_{superficie} \vec{e} \cdot d\vec{S} = \int_{vol.\ esfera} \nabla \cdot \vec{e}\, dV = \int_{vol\ esfera} D\, dv = D\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

ya que la integral es simple puesto que D es constante.

y sustituyendo el radio $R=3a$ queda

$$\phi = D\left(\frac{4}{3}\pi 3^3 a^3\right) = D\,4\pi 9a^3 = 36\pi D a^3$$

<u>Otro modo</u>: Vamos a calcular el flujo por integración directa para comprobar que el resultado es el mismo.



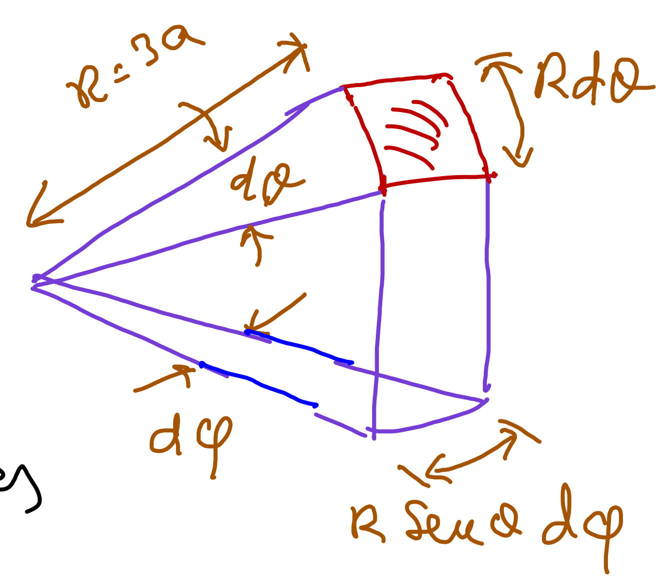
El elemento de superficie es:

$$\vec{dS} = dS\,\vec{e}_r = dS\,\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

como muestra el dibujo el área sombreada en rojo es

$$dS = (R\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi)\times(R\,d\theta)$$

$$dS = R^2\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta$$



La integral que vamos a calcular sobre la superficie de la esfera es

$$\phi = \int \left(\vec{E}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}\right)(R^2\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta) \quad \text{donde } R=3a$$

Para ello hay que calcular primero el producto $\vec{E}\cdot\vec{R}/R$ sobre la superficie de la esfera y sustituir las coordenadas (x,y,z) por sus valores en coordenadas esféricas.

$$\vec{e}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \left[Dx\vec{i} + (2 - Hyz)\vec{j} + \left(\frac{Hz^2}{2} - 1\right)\vec{k}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\underbrace{\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta}_{=\frac{x}{R}}\,\vec{i} + \underbrace{\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta}_{=\frac{y}{R}}\,\vec{j} + \underbrace{\cos\theta}_{=z/R}\,\vec{k}\right],$$

Se calcula el producto escalar, y como:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ y &= R\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right\}$$ Hay que sustituir las coordenadas rectangulares por su expresión en esféricas

$$\vec{e}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \overbrace{DR\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}^2\theta}^{S_1} + \overbrace{2\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta}^{S_2} -$$

$$- \underbrace{HR\operatorname{sen}^2\varphi\,\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}_{S_3} + \underbrace{\frac{HR^2}{2}\cos^2\theta}_{S_4} - \underbrace{\cos\theta}_{S_5}$$

cada término en el flujo $\oint$ anterior hay que integrarlo entre $0\leq\varphi\leq 2\pi$ y $0\leq\theta\leq\pi$ y lo hacemos para cada sumando de $\vec{e}\cdot\vec{r}/|\vec{r}|$

$$S_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\left[DR\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}^2\theta\right]\left[R^2\operatorname{sen}\phi\,d\varphi\,d\theta\right]$$

$$S_1 = DR^3\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi}_{=\pi}\Big]\Big[\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta}_{=4/3}\Big] = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$S_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [2 \sin\varphi \sin\theta][R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta]$$

$$S_2 = 2\left[\overbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi}^{0}\right] \times \left[\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\phi\right] = 0$$

$$S_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [-HR^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta \cos\theta][R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi]$$

$$S_3 = (-HR^4)\left[\overbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi}^{0}\right] \times \left[\overbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}^{= 4/3}\right] = 0$$

$$S_4 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{HR^2}{2} \cos^2\theta\right] [R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi]$$

$$S_4 = \frac{HR^2}{2}\left[\overbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}^{0}\right] \times \left[\overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{= 2\pi}\right] = 0$$

$$S_5 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta \, [R^2 \sin\phi \, d\varphi \, d\theta]$$

$$S_5 = R^2 \left[\overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{= 2\pi}\right] \times \left[\overbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta}^{0}\right] = 0$$

Sumando ahora todos los términos

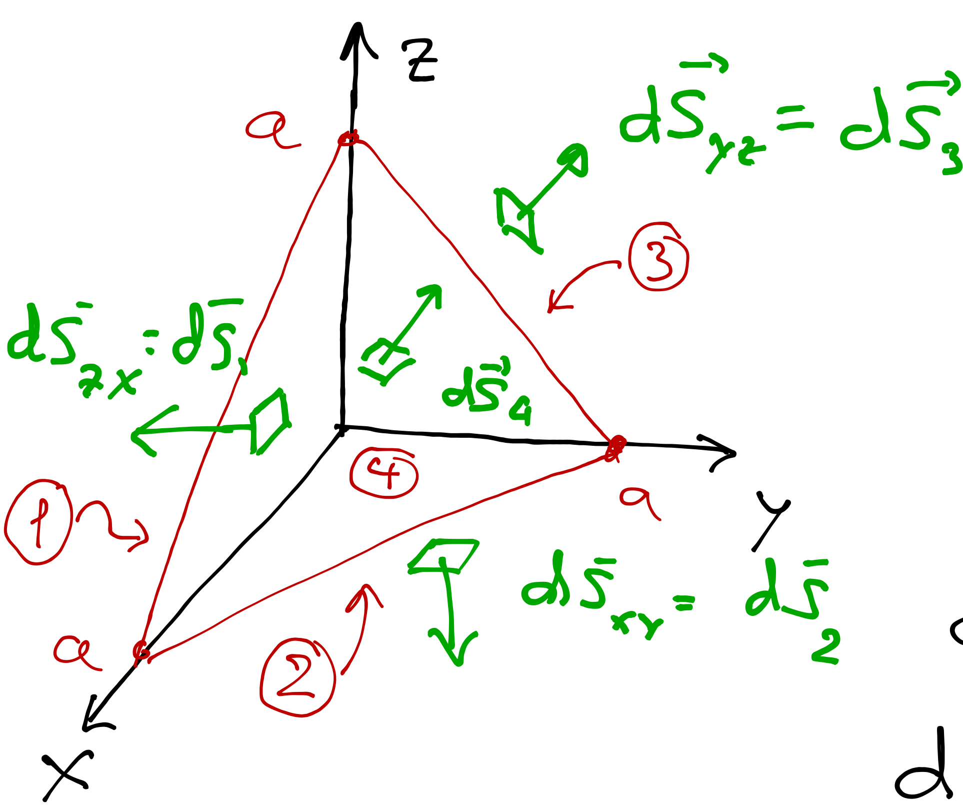
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = D\frac{4}{3}\pi R^3 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\Phi = \int_{Sup} \vec{e}\cdot d\vec{s} = D\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 36 D\pi a^3$$

Recuperamos el resultado obtenido antes por un método más complicado.

---

(5) Sabemos que la $\nabla\cdot\bar{e} = D$ cte. y para hacer el cálculo de un modo sencillo empleamos de nuevo el T^{ma} de la divergencia.



Nos piden el flujo sobre la cara 4 del dibujo. Para las otras caras,

$$d\bar{S}_1 = d\vec{S}_{xz} = (-\bar{j})\,dx\,dz \quad (y=0)$$
$$d\bar{S}_2 = d\bar{S}_{xy} = (-\bar{k})\,dx\,dy \quad (z=0$$
$$d\bar{S}_3 = d\bar{S}_{yz} = (-\bar{i})\,dy\,dz \quad (x=0)$$

y $d\vec{S}_4$ apunta como se indica en el dibujo. El flujo sobre todo el tetraedro es:

$$\Phi = \int_{Tetra} \bar{e}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \bar{e}\cdot d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{e}\cdot d\bar{S}_2 + \int_{S_3} \bar{e}\cdot d\bar{S}_3 + \int_{S_4} \bar{e}\cdot d\bar{S}_4$$

es la suma de los flujos sobre cada una de las caras y entonces podemos despejar

flujo sobre todo el tetraedro

$$\underbrace{\int_{S_4} \bar{e}\cdot d\bar{S}_4}_{=\Phi_4} = -\underbrace{\int_{S_1} \bar{e}\cdot d\bar{S}_1}_{=\Phi_1} - \underbrace{\int_{S_2} \bar{e}\cdot d\bar{S}_2}_{=\Phi_2} - \underbrace{\int_{S_3} \bar{e}\cdot d\bar{S}_3}_{=\Phi_3} + \boxed{\int_{Tetra} \bar{e}\cdot d\bar{S}'}$$

El flujo sobre todo el tetraedro se calcula mediante el teorema de la divergencia

$$\Phi_{Tetra} = \int_{Tetra} \bar{e}\cdot d\bar{S} = \int_{\substack{vol.\\Tetra}} (\nabla\cdot\bar{e})\, dV = \int_{\substack{vol\\tetra}} D\, dV = D\int_{\substack{vol\\tetra}} dV$$

El volumen del tetraedro es entonces,

$$V = \left[\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}\text{área de la}\\ \text{base}\end{smallmatrix}\right)\times(\text{altura})\right] = \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}a^2}_{\text{área del triángulo de lado } a}\Big)a = \frac{a^3}{6}$$

luego $\Phi_{tetra} = \dfrac{Da^3}{6}$ y calculamos ahora los flujos sobre cada una de las caras

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \tilde{e}\cdot d\bar{S}_1 = \int_{S_1} (2-\cancel{Hy}^{\,0}z)(-1)\, dx\,dz = \int_{S_1} (-2)\, dx\,dz$$

↑ y = 0 en el plano (x, z)

$$\Phi_1 = (-2)\int_{S_1} dx\,dz = (-2)\left[\frac{1}{2}a^2\right]$$

superficie de la cara triangular

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{e} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} \left(\frac{1}{2} H \cancel{z^2}^{\,0} - 1\right)(-1)\, dx\, dy = \int_{S_2} dx\, dy$$

$z = 0$ en el plano (x,y)

$$\Phi_2 = \left[\frac{1}{2} a^2\right]$$

Superficie de la cara triangular

$$\Phi_3 = \int_{S_3} \vec{e} \cdot d\vec{S}_3 = \int_{S_3} (D\cancel{x}^{\,0})(-1)\, dz\, dy = 0$$

$x = 0$ en el plano (z,y)

Con esto resulta entonces

$$\Phi_4 = -\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 = 2\,\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} - 0 + \frac{Da^3}{6}$$

$$\Phi_4 = \frac{Da^3}{6} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{Da^3}{6} + \frac{a^2}{2}$$