(a) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\quad |\vec{r}|^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2$ **P.-28**

es la distancia del origen a un pto. del espacio luego

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2-1}(2x)$$

$$= \frac{2x}{2r} = \frac{x}{r}$$ y lo mismo para las otras dos derivadas de modo que

$$\nabla r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}_r$$

es un vector unitario en la dirección radial.

<u>NOTA</u>: En general tendremos para una función $f(r)$ que depende del módulo $|\vec{r}| = r = [x^2+y^2+z^2]^{1/2}$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right] = \frac{\partial f}{\partial r}\left[\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r}\right]$$

luego $\quad \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\bar r}{|\bar r|} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r$ ← vector unitario radial en las coordenadas esféricas

(b) El vector $\bar r = x\bar\imath + y\bar\jmath + z\bar k$ es una función vectorial

$$\nabla\cdot\vec r = \nabla\cdot\left[x\vec\imath + y\bar\jmath + z\bar k\right] = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(c) Como $1/r$ es una función escalar podemos calcular su gradiente

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec\imath + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\bar\jmath + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec k$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(r^{-1}) = \frac{\partial}{\partial r}(r^{-1})\frac{\partial r}{\partial x} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

Luego $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x}{r}$ y lo mismo para las demás componentes y tendremos

vector unitario radial en las coordenadas esféricas

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\left[\frac{x\bar\imath + y\bar\jmath + z\bar k}{r}\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec r}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec e_r$$

Puede obtenerse directamente con la fórmula anterior.

(d) Como el gradiente es una función vectorial podemos calcular su divergencia

$$\nabla\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \nabla\cdot\left[\underbrace{-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}_{A_r\vec{e}_r}\right]$$

$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \downarrow A_r\vec{e}_r \qquad \bar{e}_r = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$

Es una función vectorial que si se expresa en coord. esféricas solo tiene una componente A_r en la dirección radial. Si empleamos la expresión de la divergencia en coordenadas esféricas (ver las notas del curso) tendremos

$\nabla\cdot\left[A_r\bar{e}_r\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right]$ ya que $A_\theta\vec{e}_\theta$ y $A_\varphi\vec{e}_\varphi$ son nulas en este caso particular. Si sustituimos $A_r = -\frac{1}{r^2}$ resulta entonces

$$\nabla\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r^2}\left(-\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$