Prob: 2.9

La función $\vec{\rho} = \rho\,\vec{u}_\rho$ con $\rho^2 = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas no tiene componente z luego

(a) $\nabla\rho = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

y como la otra derivada es semejante queda,

$$\nabla\rho = \frac{x\vec{i}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}(x\vec{i}+y\vec{j}) = \frac{\vec{\rho}}{\rho} = u_\rho$$

También puede calcularse empleando la expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas.

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\rho}\vec{u}_\rho = u_\rho$$

(b) Calculamos $\nabla\cdot\vec{\rho} = \nabla\cdot[\underbrace{\rho\,\bar{u}_\rho}_{P_\rho\vec{u}_\rho}]$ en coordenadas cilíndricas:

$\rightarrow$ Componente $P_\rho$ del campo vectorial

$$\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho P_\rho] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\times\rho]$$

es la componente $P_\rho$ del campo $\vec{P}$ que en este caso es $\rho$

$$\nabla\cdot\vec{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\right] = \frac{1}{\rho}\,2\rho = 2$$

Puede hacerse también en coordenadas cartesianas como en el apartado anterior

$$\nabla\cdot\vec{\rho} = \nabla\cdot\left[\underbrace{(x^2+y^2)^{1/2}}_{\rho}\,\underbrace{\frac{(x\vec{i}+y\vec{j})}{(x^2+y^2)^{1/2}}}_{\vec{u}_\rho \text{ anterior}}\right] = \nabla\cdot\left[x\vec{i}+y\vec{j}\right]$$

$$\nabla\cdot\vec{\rho} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2$$

(c) En coordenadas cartesianas

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]\vec{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}(2x) = -x\,\underbrace{(x^2+y^2)^{-3/2}}_{\rho^{-3}}$$

y la otra derivada parcial es semejante, luego

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left[-\frac{x}{\rho^3}\vec{i} - \frac{y}{\rho^3}\vec{j}\right] = -\frac{1}{\rho^3}(x\vec{i}+y\vec{j}) = -\frac{1}{\rho^3}\vec{\rho}$$

y queda $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\vec{u}_\rho$ con $\vec{u}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho}$

Empleando la expresión del gradiente de un campo escalar en coordenadas cartesianas, $\phi = 1/\rho$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}^{\,0}\vec{u}_\varphi + \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial z}}^{\,0}\vec{u} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\vec{u}_\rho$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\vec{u}_\rho = (-1)\,\rho^{-2}\,\vec{u}_\rho = -\frac{1}{\rho^2}\vec{u}_\rho$$

(d) Si calculamos la divergencia del campo anterior

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla\cdot\left[-\frac{1}{\rho^2}\vec{u}_\rho\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\,(\nabla\phi)_\rho\right]$$

$(\nabla\phi)_\rho$ componente $\rho$ del gradiente.

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{-1}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = -\frac{1}{\rho}(-1)\,\rho^{(-2)} = \frac{1}{\rho^3}$$