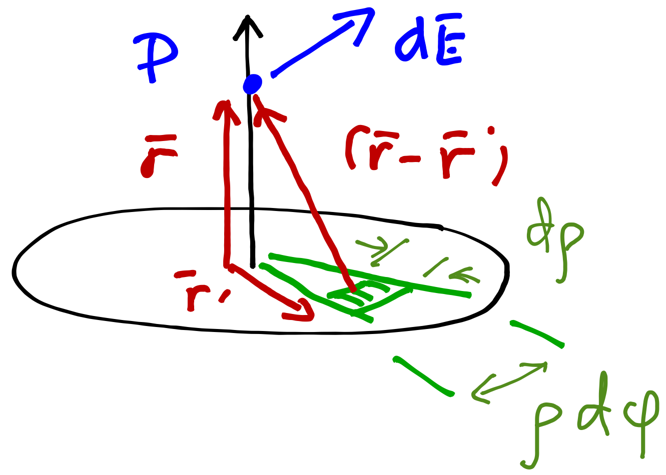


Prob. 3.4.

La densidad de carga en σ_0 uniforme $dS = (\rho\, d\varphi)\, d\rho$

$\bar{r}' = \rho' \vec{u}_\rho$ $\qquad \bar{r} = z\vec{k}$

y la distancia del elemento de carga $dQ = \sigma_0\, dS$ al punto P es

$$\bar{r} - \bar{r}' = \rho' \vec{u}_\rho + z\vec{k} \rightarrow |\bar{r} - \bar{r}'|^2 = z^2 + \rho'^2$$

y el campo $d\vec{E}$ creado por la carga dQ es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{\sigma_0\, dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{k} - \rho' \vec{u}_\rho}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

A lo largo del eje z sólo tendremos componente dE_z del campo por simetría, luego

$$dE_z = \frac{\sigma_0\, dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{k}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho' \sigma_0 z\, d\varphi\, d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

y la coordenada z no es una variable de integración.

$$dE_z = \frac{z\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} d\varphi \frac{\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho'$$

Podemos integrar sobre el ángulo φ y la coordenada ρ', pues son independientes

$$E_z = \frac{z\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \times \left(\int_0^R \frac{\rho'\, d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_z = \frac{2\sigma_0(2\cancel{\pi})}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\int_0^R \frac{(2\rho')\,d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\right] =$$

$$E_z = \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[(-1)\,(z^2+\rho'^2)^{-1/2}\right]_0^R$$ y queda entonces

$$E_z = (-1)\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} - \frac{z}{|z|}\right]$$

Tiene que ser positivo para $z<0$ pues la solución tiene que ser la misma si se hace el cambio $z \to -z$

Este resultado puede escribirse de un modo más compacto

$$E_z = (-1)\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[1+(R/z)^2]^{1/2}} - \frac{z}{|z|}\right]$$ y el primer

término se anula cuando $R\to\infty$, es decir cuando el disco se convierte en un plano y recuperamos

$$E_z \simeq (-1)\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{1}{[\,\infty\,]}}_{\to 0} - \frac{z}{|z|}\right] \longrightarrow E_z = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

que es el campo eléctrico para un plano infinito que obtuvimos empleando el teorema de Gauss

El potencial eléctrico se calcula de un modo semejante. La carga $dQ = \sigma_0\,ds$ crea en el punto $\bar{r}$ un potencial,

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0\,ds}{(z^2+\rho'^2)^{1/2}}$$

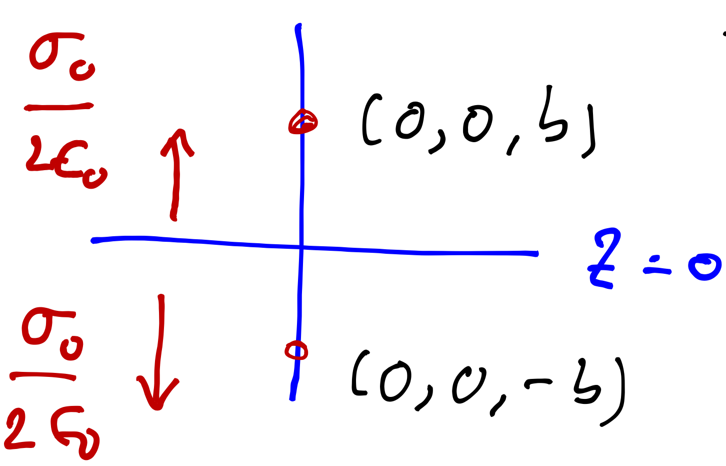
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma_0\, \rho' d\rho'\, d\varphi}{(z^2+\rho'^2)^{1/2}}$$ luego,

$$\phi = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\times\left(\int_0^{R} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$$\phi = \frac{\sigma_0}{4\cancel{\pi}\epsilon_0}(2\cancel{\pi})\times\frac{1}{2}\int_0^{R} \frac{(2\rho')\,dr'}{(z^2+\rho'^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{1/2}-|z|\right]$$

y puede comprobarse que $E_z = -d\phi/dz$. Este potencial diverge en el límite $R\to\infty$ debido a que el campo eléctrico de un plano infinito es independiente de la altura z sobre el mismo.

(3) Para el trabajo realizado por el campo tendremos



$$W = \int_{-b}^{b} q\,\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{-b}^{b} q\,E_z\,dz$$

$$W = q\int_{-b}^{+b} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}-\frac{z}{|z|}\right]dz$$

$$W = \left(-\frac{\sigma q}{2\epsilon_0}\right)\left[\int_{-b}^{+b}\frac{z\,dz}{\sqrt{R^2+z^2}}\,dz - \cancelto{0}{\int_{-b}^{+b}\frac{z}{|z|}\,dz}\right]$$ esta integral es nula.

$$W = \left(-\frac{\sigma q}{2\varepsilon}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{-b}^{+b}\frac{2z\,dz}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right] = -\frac{\sigma q}{4\varepsilon}\Big[2(z^2+R^2)^{1/2}\Big]_{-b}^{+b}$$

$$W = -\frac{\sigma q}{2\varepsilon}\left[(b^2+R^2)^{1/2}-(b^2+R^2)^{1/2}\right] = 0$$

Άρα $W = 0$