Como el sistema tiene simetría esférica calculamos los campos $\vec{E} = E\,\frac{\bar{r}}{r} = E\,\vec{e}_r$ con el t^ma de Gauss

Prob: 3.7

Tomaremos superficies esféricas de radio r que encierran una carga Q_s en su interior.

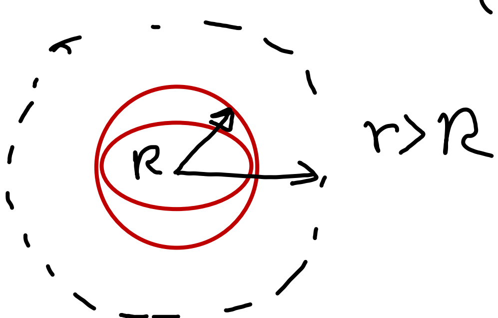
(a) La densidad de carga superficial de la esfera es

$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}$ y el espesor de la càscara esférica es despreciable tenemos dos regiones en el espacio $r>R$ y $r \leq R$

(•) Para $r \geq R$

carga dentro de la esfera a trazos en rojo → "Q"

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = |\bar{E}|\,(4\pi r^2) = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$$



Superficie S

$$|\bar{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \vec{E} = |\bar{E}|\,\vec{e}_r$$

(•) Para $r < R$

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{s} = |\bar{E}|\,(4\pi\epsilon_0) = 0$$

dentro de la esfera de radio R no hay carga eléctrica

$$|\bar{E}| = 0$$

El potencial eléctrico para $r \geq R$ es

$$\cancel{\phi_\infty} - \phi(r) = -\int_r^\infty \bar{E}\cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r\right]\cdot d\vec{r}$$

para $r\to\infty$ el potencial eléctrico es nulo

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

y recuperamos el potencial eléctrico de una carga puntual para $r \geq R$ para $r<R$ el potencial $\phi(r)$ ha de ser continuo

$E=0$ para $r<R$

$$\int^R \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$r < R \qquad \phi(R) - \phi(r) = -\int_r^R \cancel{E} \cdot dr = 0$

y entonces $\phi(r) = \phi(R) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \longrightarrow \phi = \dfrac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \qquad r \leq R$

(b) La carga Q está distribuida dentro de la esfera sólida de radio R, luego la densidad uniforme es

$\rho_0 = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$ y tenemos dos regiones

$Q_s = Q$
toda la carga de la esfera

(•) $\underline{r \geq R}$ $\qquad \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}|(4\pi r^2) = \dfrac{Q_s}{\epsilon_0}$

$|\bar{E}| = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \qquad \vec{E} = |\bar{E}|\,\vec{e}_r$ recuperamos el campo de una carga puntual para $r \geq R$

y el potencial eléctrico es entonces $\qquad \underline{\phi = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r}}$

$\cancel{\phi(\infty)}_{0} - \phi(r) = -\int_r^\infty \bar{E} \cdot d\vec{r} = -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \dfrac{dr}{r^2} \longrightarrow \phi = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Carga encerrada en la superficie esférica de radio r

(•) $\underline{r < R}$ $\qquad \int_S \bar{E} \cdot d\vec{S} = |\bar{E}|(4\pi r^2) = \dfrac{Q_s}{\epsilon_0} = \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$

$|\bar{E}| = \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \qquad \vec{E} = |\bar{E}|\,\vec{e}_r$

Para que el potencial eléctrico sea una función continua tendremos

$\phi(R) - \phi(r) = -\int_r^R \bar{E} \cdot d\vec{r} = -\int_r^R \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\,dr \qquad r < R$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \phi(r) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\int_0^R r\,dr = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \phi(r) = -\overbrace{\frac{3Q}{4\pi R^3}}^{=\rho_0} \times \frac{1}{3\varepsilon_0} \times \left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

y despejando el potencial $\phi(r)$ resulta

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

(c) Para calcular la carga dentro de la esfera hay que efectuar una integral

$$Q = \int_{\text{esfera}} \rho\,dv = \int_0^R (Kr)\times(4\pi r^2)\,dr = 4\pi K\int_0^R r^3\,dr$$

$$Q = 4\pi K \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \pi K R^4 \qquad Q = 4\pi K R^4$$

De nuevo consideramos dos regiones del espacio y aplicamos el $T^{\underline{ma}}$ de Gauss.

(○) $r \geq R$ $\qquad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}|(4\pi r^2) = \frac{Q_s}{\epsilon_0} = \frac{\pi k R^4}{\epsilon_0}$

$$|\vec{E}| = \frac{\cancel{\pi} k R^4}{4\cancel{\pi}\epsilon_0 r^2} \qquad \vec{E} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\cancel{\phi(\infty)}^{\,0} - \phi(r) = -\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_r^\infty \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}\,dr$$

$$-\phi(r) = -\frac{kR^4}{4\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{kR^4}{4\epsilon_0}\left[\frac{r^{-1}}{(-1)}\right]_r^\infty$$

$\phi(r) = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r}$ y como $Q = \pi k R^4$

es equivalente a $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ es decir que es el potecial de una carga puntual de magnitud $Q = \pi k R^4$.

(○) $r < R$ El campo eléctrico se obtiene con el f^{ma} de Gauss aplicado a una esfera de radio $r < R$.

$$\int_{esf} \vec{E}\cdot d\vec{S} = |\vec{E}|(4\pi r^2) = \frac{Q_s}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho\, dV$$

la integral es la carga Q_s dentro de la esfera

$$|\vec{E}|(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r (kr)\times(4\pi r^2)\,dr = \frac{4\pi k}{\epsilon_0}\int_0^r r^3\,dr$$

$$|\vec{E}|(4\pi r^2) = \frac{\cancel{4}\pi k}{\epsilon_0}\frac{r^4}{\cancel{4}} = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4 \qquad \text{luego}$$

$$|\bar{E}| = \frac{\cancel{\pi} k r^4}{4\cancel{\pi}\epsilon_0 r^2} = \frac{k r^2}{4\epsilon_0} \qquad \vec{E} = \frac{k r^2}{4\epsilon_0}\vec{e}_r$$

Calculamos el potencial:

$$\underbrace{\phi(R)}_{\frac{kR^3}{4\epsilon_0}} - \phi(\bar{r}) = -\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_r^R \frac{k r^2}{4\epsilon_0}\, dr = -\frac{k}{4\epsilon_0}\left[\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right]$$

$$\frac{kR^3}{4\epsilon_0} - \phi(r) = -\frac{kR^3}{12\epsilon_0} + \frac{kr^3}{12\epsilon_0}$$

$$\phi(r) = \frac{kR^3}{4\epsilon_0} + \frac{kR^3}{12\epsilon_0} - \frac{kr^3}{12\epsilon_0} = \frac{kR^3}{12\epsilon_0}\left[3 + 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$$

$$\phi(r) = \frac{kR^3}{12\epsilon_0}\left[4 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$$