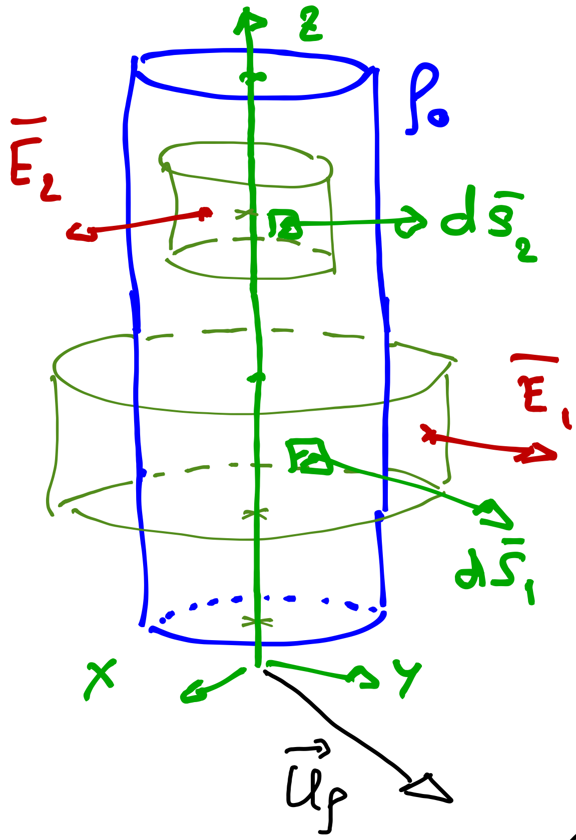

Prob. 3.8

como el cilindro es infinito, el campo eléctrico no tiene componente en la dirección $\vec{k}$ paralela al eje de simetría

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_z \qquad \vec{E}_\perp = E_r \vec{u}_\rho$$

para simplificar la notacion en este problema $r = \rho = (x^2+y^2)^{1/2}$ que es la distancia radial en coordenadas cilindricas y $\vec{u}_\rho \equiv \vec{u}_r = \cos\varphi \, \vec{i} + \operatorname{sen}\varphi \, \vec{j}$

Dividimos el espacio en dos regiones $r \geq R$ y $r < R$ en las que consideramos una superficie de Gauss cilíndrica de altura H y radio $r = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Para $r > R$ aplicando el t^{ma} de Gauss se tiene.

$$\int_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = \underbrace{\int \cancelto{0}{\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1}}_{\text{tapa superior}} + \underbrace{\int \cancelto{0}{\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1}}_{\text{tapa inferior}} + \underbrace{\int \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1}_{\text{lados}}$$

Las dos primeras integrales son nulas pues $\bar{E}_1 \parallel \vec{u}_\rho$ y $d\bar{S}_1 \parallel \vec{k}$ en las tapas superior e inferior. En los lados $\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = |E_1| dS_1$ ya que $d\bar{S}_1 \parallel \bar{u}_\rho$

$$\int_{S_1} \bar{E}\cdot d\bar{S}_1 = \int_{\text{lados}} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = \int_{\text{lados}} |\bar{E}_1|\, dS_1 = |\bar{E}_1| \int_{\text{lados}} d\bar{S}_1$$

pues para cada radio $r \geq R$ el valor de $|\bar{E}_1|$ es el mismo por simetría. Tendremos,

$$E_1 \times (2\pi r) \times H = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{\text{cil.}} \rho\, dv\right]$$

$$E_1 \times (2\pi r) \times H = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{r=0}^{R} \rho_0 \underbrace{(2\pi r) \times H \times dr}_{dv}\right]$$

Equivale a descomponer el cilindro en capas de altura H, espesor dr y longitud $(2\pi r)$

$$E_1 \times (\cancel{2\pi} r)\, \cancel{H} = \frac{\rho_0 (2\pi)}{\epsilon_0}\left[H\int_0^R r\, dr\right] = \frac{(\cancel{2\pi})\, \rho_0\, \cancel{H}}{\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{2}\right)$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad y \quad \vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_\rho$$

Para $r < R$ repetimos los mismos argumentos de simetría con el cilindro S_2 y tendremos

$$\int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = \int_{\text{lados}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{\text{lados}} |\bar{E}_2|\, dS_2 = |\bar{E}_2| \int_{\text{lados}} dS_2 = E_2 (2\pi r) \times H$$

luego

$$E_2 (2\pi r) \times H = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_0^r \rho_0 \underbrace{(2\pi r)\, H\, dr}_{dv}\right.$$

$$E_2 (2\pi r) \times H = \frac{(2\pi)\rho_0}{\epsilon_0}\left[H \times \left(\int_0^r r\,dr\right)\right]$$

$$E_2 (2\cancel{\pi r}) \times \cancel{H} = \frac{\cancel{2\pi}\rho_0}{\epsilon_0} \cancel{H}\left(\frac{r^{\cancel{2}}}{2}\right) \text{ y queda}$$

$$E_2 = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \quad (r < R) \quad \text{y también} \quad \vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_\rho$$

Para calcular el potencial eléctrico de nuevo se divide el espacio en dos regiones y empleamos la expresión:

$$\phi_b - \phi_a = -\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

y nos piden en el enunciado que tomemos en $r = R$ el potencial $\phi(R) = 0$. Para $r < R$,

$$\cancel{\phi(R)}^{\,0} - \phi(r) = -\int_{r<R}^{r=R} \bar{E}_2 \cdot d\bar{r} = -\int_r^R \left(\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\right) dr$$

$$-\phi(r) = \left(-\frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\right)\int_r^R r\,dr = \left(-\frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\right)\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

$$\phi(r) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\left[R^2 - r^2\right] \quad 0 \leq r \leq R$$

que respeta la condición que nos piden $\phi(R) = 0$

El potencial ha de ser una función continua, luego partimos del punto $r=R$ para calcular el potencial para $r>R$ haciendo

$$\phi(r) - \cancel{\phi(R)}^{\,0} = -\int_R^r \bar{E}_1 \cdot d\bar{r} = -\int_R^r \left(\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}\right) dr$$

$$\phi(r) = \left(-\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\right)\int_R^r \frac{dr}{r} = \left(-\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

finalmente,

$$\phi(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \qquad r>R \qquad [1]$$

Nótese que $\ln(R/r)$ crece indefinidamente cuando $r \to 0$

NOTA: De nuevo nos encontramos en [1] la incoherencia en la determinación del potencial (ver la solución del problema 3.6). La condición con sentido físico es $\phi(r) \to 0$, $r \to \infty$ y partir de un punto lejano para calcularlo haciendo

$$\cancel{\phi(\infty)}^{\,0} - \phi(r) = -\int_r^\infty \bar{E}_1 \cdot d\bar{r} = -\int_r^\infty \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\right) dr$$

$$-\phi(r) = -\left(\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\right)\int_r^\infty \frac{dr}{r}$$ y esta integral no puede evaluarse porque su límite superior diverge. La razón es que un tubo de carga infinito no es una situación físicamente realista.