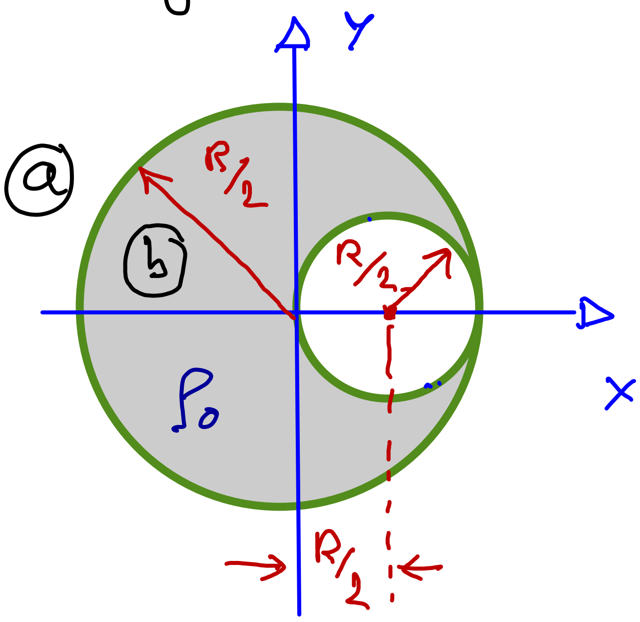
Los campos que nos piden resultan de la superposición de los de la esfera con carga positiva y el hueco. El hueco es el campo de una esfera centrada en $-\frac{R}{2}\vec{i}$ pero con carga negativa

Prob: 3.9



Para los dos vamos a emplear el campo eléctrico de una esfera de carga de densidad ρ_0 (problema 3.7).

Para la esfera sólida (sin el hueco) centrada en el origen se tienen dos regiones:

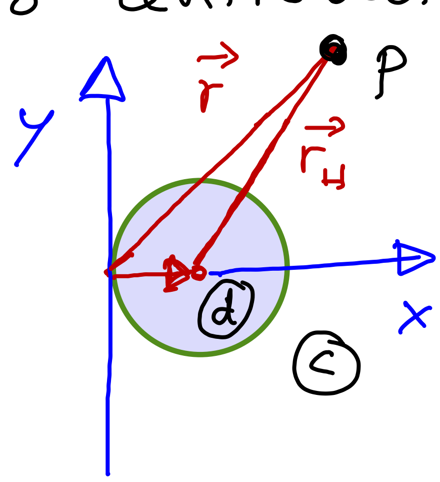
ⓐ $r \geq R$ $\quad \vec{E}_a = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ con $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$

$$\vec{E}_a = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

y es equivalente al campo creado por una carga puntual.

ⓑ $r < R$ $\quad \vec{E}_b = \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r$

Para el hueco vamos a utilizar estas mismas expresiones pero centradas en el punto $x = -R/2$ y con densidad de carga negativa $(-\rho_0)$.



Desde el centro de la esfera el vector radial que apunta al punto P será:

$$\vec{e}_H = \frac{\vec{r}_H}{r_H} \qquad \vec{r}_H = \vec{r} - \frac{R}{2}\vec{i} \quad \text{y módulo es}$$

$$r_H^2 = |\vec{r}_H|^2 = |\vec{r} - \frac{R}{2}\vec{i}|^2 = (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 + z^2$$

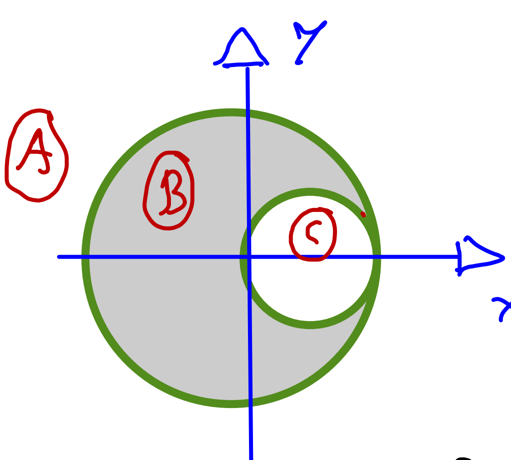
Para el campo que crea el hueco podemos repetir las fórmulas anteriores empleando $\vec{e}_H$ en lugar de $\vec{e}_r$ y tendremos

Ⓒ $r_H > \frac{R}{2}$ $\quad \vec{E}_c = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r_H^2}\vec{e}_H \qquad Q_c = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3(-\rho_0)$

$$Q_c = \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{8}(-\rho_0) = \frac{\pi R^3}{6}(-\rho_0)$$

$$\vec{E}_c = \frac{(-\rho_0)\cancel{\pi}R^3/6}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0 r_H^2}\vec{e}_H = -\frac{\rho_0 R^3}{24\varepsilon_0 r_H^2}\vec{e}_H$$

Ⓓ $r_H < \frac{R}{2}$ $\quad \vec{E}_d = -\frac{\rho_0 r_H}{3\varepsilon_0}\vec{e}_H$



Nos piden calcular los campos en las regiones que se indican en el dibujo que son:

$$\begin{cases} \vec{E}_A = \vec{E}_a + \vec{E}_c & \text{fuera de la figura} \\ \vec{E}_B = \vec{E}_b + \vec{E}_c & \text{fuera del hueco y dentro de la esfera de radio } R \\ \vec{E}_C = \vec{E}_b + \vec{E}_d & \text{Dentro del hueco} \end{cases}$$

Sustituyendo los campos anteriores resulta.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_a + \vec{E}_c = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r - \frac{\rho_0 R^3}{24\epsilon_0 r_H^2}\vec{e}_H$$ (Exterior)

$$\vec{E}_B = \vec{E}_b + \vec{E}_c = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r - \frac{\rho_0 R^3}{24\epsilon_0 r_H^2}\vec{e}_H$$ (Zona sombreada)

$$\vec{E}_C = \vec{E}_b + \vec{E}_d = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r - \frac{\rho_0 r_H}{3\epsilon_0}\vec{e}_H$$ (Hueco)

La última expresión puede agruparse puesto que es

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[\vec{r} - \vec{r}_H\right]$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[(x\vec{i} + \cancel{y\vec{j}} + \cancel{z\vec{k}}) - [(x-\tfrac{R}{2})\vec{i} + \cancel{y\vec{j}} + \cancel{z\vec{k}}]\right]$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{R}{2}\right]\vec{i} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{R}{2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0}\vec{i}$$