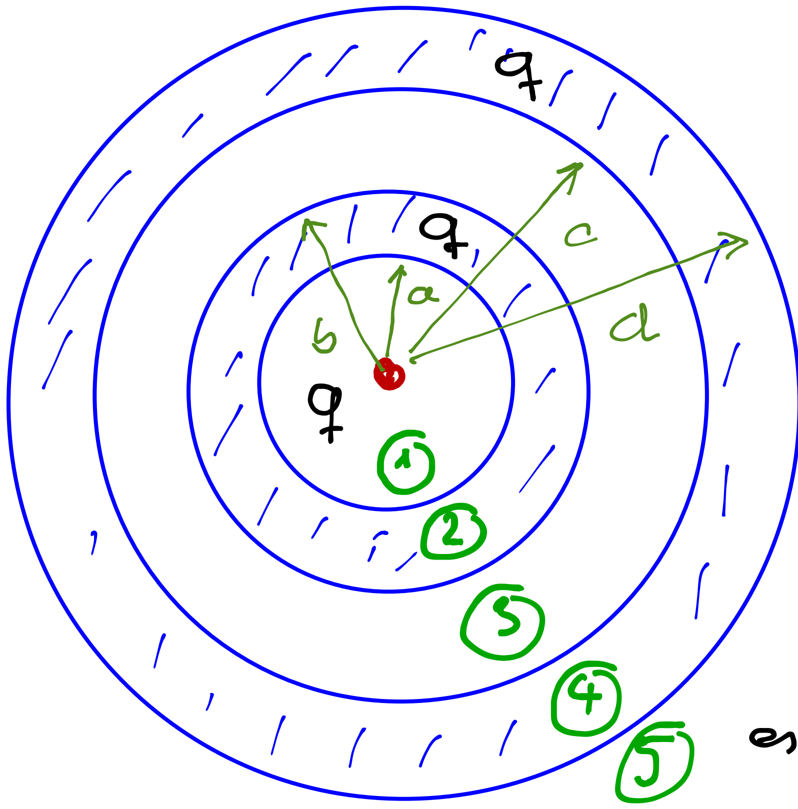
Prob. 4.1

En el sistema de la figura todos los campos son radiales por simetría y dividimos el espacio en 5 zonas desde dentro hacia afuera. En todas ellas



$$\vec{E}_r = E_r \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

y vamos a aplicar el t^{ma} de Gauss para calcular los campos eléctricos.

Todas las superficies de Gauss son esferas y $d\bar{S} = \bar{n}\, dS$ con $\bar{n} = \bar{r}/r$ y vamos desde fuera hacia adentro.

5 Para $r > d$ toda la configuración se ve como una carga puntual luego

$$\int_{S_5} \bar{E}_5 \cdot d\bar{S}_5 = |\bar{E}_5|\,(4\pi r^2) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{3q}{\varepsilon_0}$$

$$E_5 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \bar{E}_5 \parallel \frac{\bar{r}}{r}$$

y la densidad de carga sobre la superficie externa del conductor será

$$\sigma_d = \varepsilon_0\, \vec{E}_5(d)\cdot \vec{n}_d \quad \text{y} \quad \bar{n}_d = \frac{\bar{r}}{r} \quad \text{luego } r = d$$

$$\sigma_d = \cancel{\varepsilon_0}\, \frac{3q}{4\pi \cancel{\varepsilon_0}\, d^2} \qquad \sigma_d = \frac{3q}{4\pi d^2}$$

4 Para $d \geq r > c$ el campo es nulo $E_4 = 0$ por estar dentro del metal

(3) El campo en esta zona sólo depende de la carga que existe para $c \geq r \geq b$ de modo que utilizando de nuevo el T^{ma} de Gauss resulta.

$$\int_{S_3} \bar{E}_3 \cdot d\bar{S}_3 = E_3 (4\pi r^2) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{2q}{\varepsilon_0} \qquad c \leq r \leq b$$

$$E_3 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \bar{E}_3 = E_3 \frac{\bar{r}}{r} \quad \text{y} \quad \sigma_c = \varepsilon_0 \bar{E}_c \cdot \vec{n}_c$$

$$\sigma_c = -\cancel{\varepsilon_0} \frac{2q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0} c^2} \qquad \sigma_c = -\frac{2q}{4\pi c^2}$$

$\vec{n}_c = -\frac{\vec{r}}{r}$ apunta hacia adentro

y sobre la superficie b se tiene $\bar{n}_b = \bar{r}/r$ luego

$$\sigma_b = \varepsilon_0 \vec{E}_3(b) \cdot \vec{n}_b = \cancel{\varepsilon_0} \frac{2q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0} b^2} = \frac{2q}{4\pi b^2}$$

(2) Aquí de nuevo el campo $\bar{E}_2 = 0$ entre $a < r < b$ porque estamos dentro del metal.

(1) El campo para $a \geq r > 0$ se debe sólo a la carga q situada en el centro y volviendo a aplicar el T^{ma} de Gauss,

$$\int_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = E_1 (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

y la densidad superficial de carga es

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1(a) \cdot \vec{n}_a \qquad \text{siendo } \vec{n}_a = -\frac{\bar{r}}{r}$$

$$\sigma_1 = \cancel{\varepsilon_0} \frac{(-q)}{4\pi\cancel{\varepsilon_0} a^2} = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Para calcular el potencial eléctrico tenemos que partir de un punto conocido, que en el enunciado nos dicen es un punto distante donde $\phi \to 0$ y empleamos la ecuación

$$\phi_5 - \phi_a = -\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_5} \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

en todas las regiones del espacio. Partimos del pto. lejano.

(5) $$\cancelto{0}{\phi(\infty)} - \phi(d) = -\int_d^\infty \bar{E}_5 \cdot d\bar{r} = -\int_d^\infty \left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) dr$$

$$\phi_d = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0} \int_d^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{3q}{4\pi} \left[-\frac{1}{r}\right]_d^\infty = -\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{d}\right]$$

$$\phi_d = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Para $r>d$ la distribución tiene el mismo potencial que una carga puntual de magnitud $3q$ luego para

tendríamos

$$\phi(r) = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 d} \quad \text{para} \quad r>d$$

(4) En $c \leq r \leq d$ el potencial es cte puesto que estamos dentro del metal y simplemente

$$\phi(c) = \phi(d)$$

(3) Para el espacio $c > r > b$ tendremos aplicando de nuevo la expresión anterior.

$$\phi(c) - \phi(r) = -\int_r^c \bar{E}_3 \cdot d\bar{r} = -\int_r^c \underbrace{\left(\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)}\, dr$$

De nuevo es el potencial de una carga puntual de magnitud $2q$.

$$\phi(r) = \overset{\phi(d)}{\overset{\shortparallel}{\phi(c)}} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right]$$

y queda

$$\phi(r) = \phi(d) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right)$$

y en $r = b$ se tiene

$$\phi(b) = \phi(d) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

(2) En el metal entre $b \geq r \geq a$ el potencial de nuevo es constante y $\phi(b) = \phi(a)$

(1) Para $0 < r < a$ repetimos el argumento y

$$\phi(a) - \phi(r) = -\int_a^r E_1 \cdot dr = -\int_a^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr$$

Como vemos es de nuevo el potencial de una carga puntual de magnitud q

Luego

$$\phi(r) = \phi(a) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^a \frac{dr}{r} = \phi(a) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^a$$

$$\phi(r) = \phi(a) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\phi(r) = \phi(a) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$\|$

$\phi(b)$