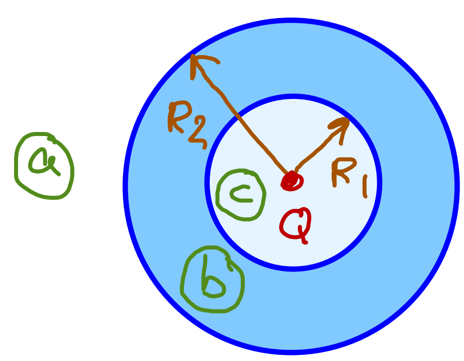
El campo eléctrico está creado por una carga puntual situada en el centro geométrico de la cáscara esférica.

Prob: 5.3

(a) Los campos tienen simetría radial $\vec{D} \parallel \vec{E} \parallel \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$ y podemos aplicar el teorema de Gauss a superficies esféricas centradas en la carga situada en el origen de coordenadas. Considerамos las tres regiones que se indican en el dibujo.



(a) Para $r > R$ podemos considerar que el campo está creado por la carga Q y aplicando el t^{ma} de Gauss se tiene simplemente:

$$\vec{E}_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (r \geq R)$$

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ en el vacío $\epsilon_r = 1$ $\quad \vec{D}_a = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$

y en esta región $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ es nulo $\vec{P}_a = 0$

(b) Aplicamos el t^{ma} de Gauss a una esfera de radio $R_1 < r < R_2$ en la zona donde hay dieléctrico

$$\int_{R_1<r<R_2} \vec{D}_b \cdot d\vec{S} = Q \qquad |\vec{D}_b|(4\pi r^2) = Q \qquad \vec{D}_b = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ $\qquad \vec{E}_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\vec{e}_r \qquad R_1 \leq r \leq R_2$

El vector de polarización $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}$ sólo es distinto de cero en esta zona donde hay dieléctrico

$$\vec{P}_b = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{P}_b = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

c) Para $r < R_1$ no hay dieléctrico y para $r < R_1$ se recupera el campo eléctrico de una carga puntual aplicando el $t^{ma.}$ de Gauss

$\varepsilon_r = 1$ en el vacío

$$\vec{E}_c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{D}_c = \varepsilon_0 \underset{1}{\varepsilon_r}\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

y como $\varepsilon_r = 1$ $\quad \vec{P}_c = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$ es nulo $\vec{P}_c = 0$

(c) Para calcular el potencial eléctrico tenemos que partir de un punto conocido, y de nuevo $\phi \to 0$ cuando $r \to \infty$ ya que para $r > R_2$ el campo eléctrico es el de una carga puntual

En $r > R_2$ $\quad \phi_a = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad$ y $\quad \phi_a(R_2) = \phi_b(R_2)$

para que el potencial eléctrico sea una función continua. En la región (b) tendremos:

$$\overset{\phi_a(R_2)}{\overset{\shortparallel}{\phi_b(R_2)}} - \phi_b(r) = -\int_r^{R_2} \vec{E}_b \cdot d\vec{r} = -\int_r^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\, dr$$

$$\phi_a(R_2) - \phi_b(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_r^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi_b(r) = \overset{\phi_a(R_2)}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi_b(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r r} - \frac{1}{\epsilon_r R_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{\epsilon_r}{R_2} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$\phi_b(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{\epsilon_r - 1}{R_2} + \frac{1}{r}\right] \quad \text{para} \quad R_1 \leq R \leq R_2$$

En $r = R_1$ se tiene $\phi_c(R_1) = \phi_b(R_1)$ para que el potencial sea continuo;

$$\overset{\phi_b(R_1)}{\overset{\shortparallel}{\phi_c(R_1)}} - \phi_c(r) = -\int_r^{R} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = -\int_r^{R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr$$

$$\phi_c(r) = \phi_c(R_1) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \phi_c(R_1) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\phi_c(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\left[\frac{\epsilon_r - 1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\phi_c(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\epsilon_r R_1}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{r}\right]$$

$$\phi_c(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{1}{R_2}-\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{r}\right]$$

$$\phi_c(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{\epsilon_r-1}{R_2}+\frac{1-\epsilon_r}{R_1}+\frac{\epsilon_r}{r}\right] \qquad r<R_1$$

(b) Las densidades de carga de polarización superficial en las caras de la corteza de dieléctrico son:

$$\sigma_s(R_2) = \vec{P}(R_2)\cdot\underbrace{\frac{\vec{R}_2}{R_2}}_{=\,\vec{e}_r} = \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_2^2}\vec{e}_r\right)\cdot\vec{e}_r$$

$$\sigma_s(R_2) = \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

$$\sigma_s(R_1) = \vec{P}(R_1)\cdot\underbrace{\left(-\frac{\vec{R}_1}{R_1}\right)}_{=\,-\vec{e}_r} = \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_1^2}\right)\cdot(-\vec{e}_r)$$

La normal exterior apunta hacia la carga q en el origen.

$$\sigma_s(R_1) = -\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

La densidad de carga de polarización volumétrica es nula puesto que utilizando el operador divergencia en coordenadas esféricas:

$$\vec{P} = P_r \, \vec{e}_r \qquad P_r = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\rho_v = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 P_r \right)$$ ya que $\vec{P}$ sólo tiene componente radial.

$$\rho_v = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\cancel{r^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi \cancel{r^2}} \right) \right] = 0$$

Finalmente, la carga total en el dieléctrico es nula puestoque

$$Q_{TOT} = \sigma_s(R_1) \times S_1 + \sigma_s(R_2) \times S_2$$

$$Q_{TOT} = \left(-\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_1} \frac{Q}{\cancel{4\pi R_1^2}} \right) \times \left(\cancel{4\pi R_1^2} \right) + \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\cancel{4\pi R_2^2}} \right) \left(\cancel{4\pi R_2^2} \right)$$

$$Q_{TOT} = \left[-\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q + \frac{\epsilon_r - 1}{Q} Q \right) = 0$$