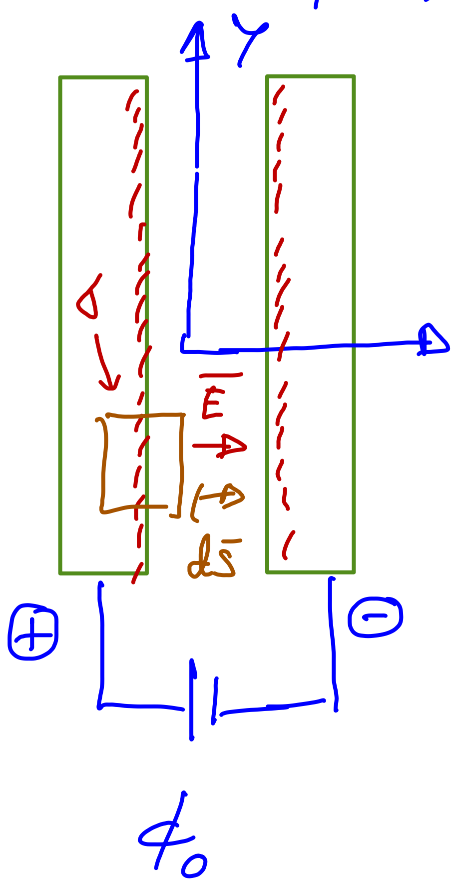
Prob. 5.6

El condensador de la figura se conecta a la fuente de alimentación que mantiene la diferencia de potencial ϕ_0 entre las placas. Al introducir el dieléctrico manteniendo ϕ_0 cte cambia la densidad de carga en las armaduras del condensador.

$S \equiv$ Superficie de las placas

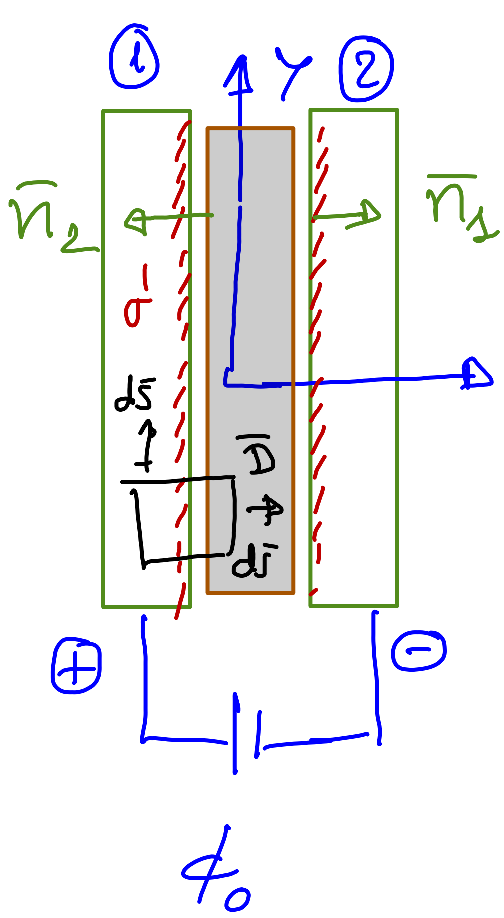


(o) SIN el material dieléctrico (ver el problema 5.5) se tiene

$$\vec E_{sin} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec i \qquad Q_{sin} = C\phi_0 = \frac{\epsilon_0 \phi_0 S}{d}$$

$$\sigma = \frac{Q_{sin}}{S} = \frac{\epsilon_0 \phi_0}{d} \quad \text{y también} \quad E_{sin} = \frac{\phi_0}{d}$$

(o) Cuando introducimos el dieléctrico manteniendo ϕ_0 cte la densidad σ pasa a ser σ' y aplicando el t^{ma} de Gauss



$$\oint_{\text{cilindro}} \vec D\cdot d\vec S = \underbrace{\int_{\text{lados}} \bar D\cdot d\bar S}_{0\ (\bar D \perp d\bar S)} + \underbrace{\int_{\substack{\text{tapa}\\ \text{izq}}} \bar D\cdot d\bar S}_{0\ (\bar D = 0 \text{ en el metal})} + \int_{\substack{\text{tapa}\\ \text{der}}} \bar D\cdot d\bar S = Q_e$$

Sección del cilindro

nueva densidad de carga sobre las placas

$$\oint_{\text{cil}} \bar D\cdot d\bar S = D\times A = Q_e = \int \sigma' dS = \sigma' \times A$$

luego $\vec D = \sigma' \vec i$

y el campo eléctrico es $\vec E_{con} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r}\vec D = \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}\vec i$

Ahora σ' es desconocida y para determinarla podemos calcular la diferencia de potencial entre las placas ϕ_0 que sí es conocida.

$$-\phi_0 = \phi\left(\frac{d}{2}\right) - \phi\left(-\frac{d}{2}\right) = -\int_{-d/2}^{d/2} \bar{E}_{con}\, dx = -\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}\, dx$$

la placa izquierda está a potencial positivo

$$-\phi_0 = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}\left[\frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right)\right] = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} d \rightarrow \sigma' = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \phi_0}{d}$$

Como $\epsilon_r > 1$ $\sigma' > \sigma = \frac{\epsilon_0 \phi_0}{d}$ que es el valor en el vacío

El campo eléctrico es

$$\vec{E}_{con} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}\vec{i} = \frac{1}{\cancel{\epsilon_0 \epsilon_r}} \frac{\cancel{\epsilon_0 \epsilon_r}\phi_0}{d}\vec{i}$$

$$\vec{E}_{con} = \frac{\phi_0}{d}\vec{i} \quad y \quad \vec{D} = \sigma'\vec{i} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \phi_0}{d}\vec{i}$$

El vector de polarización es $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}_{con}$

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\phi_0}{d}\vec{i}$$

y las densidades de carga de polarización:

$$\sigma_{p1}\left(\frac{d}{2}\right) = \vec{P}\cdot\vec{n}_1 = \vec{P}\cdot\vec{i} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\phi_0}{d}\vec{i}$$

$$\sigma_{p2}\left(-\frac{d}{2}\right) = \vec{P}\cdot\vec{n}_2 = \vec{P}\cdot(-\vec{i}) = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\phi_0}{d}\vec{i}$$

$$\rho_{pol} = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{dP}{dx} = 0$$