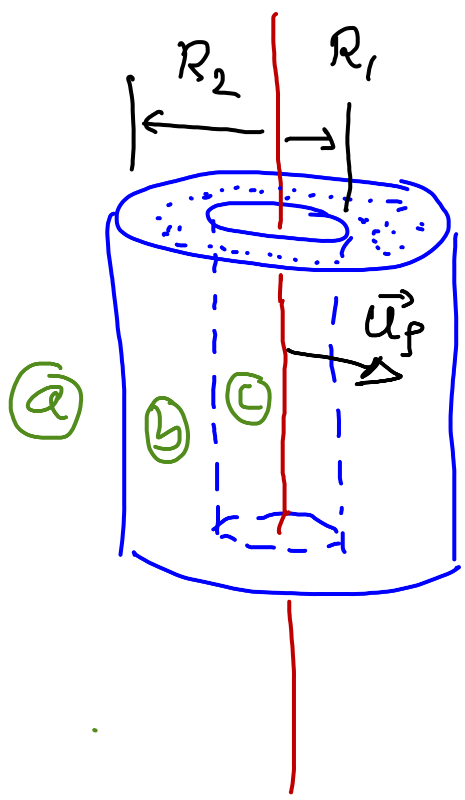
Prob: 5.7

El sistema tiene simetría cilíndrica y todos los campos apuntan a lo largo de la dirección radial $\vec{u}_\rho$ en coordenadas cilíndricas.



(a) Dividimos el espacio en tres regiones como muestra el dibujo y calculamos los campos $\vec{D} \parallel \vec{E} \parallel \vec{u}_\rho$ empleando el T^{ma} de Gauss con superficies cilíndricas de radio ρ y altura L.

(a) Para $\rho > R_2$ para un cilindro de radio $r > R_2$ y altura L tendremos:

$$\int_{S_a} \vec{D}_a \cdot d\vec{S}_a = \int_{\text{lados}} \vec{D}_a \cdot d\vec{S}_a + \int_{\text{tapas}} \cancelto{0}{\vec{D}_a \cdot d\vec{S}_a} = |\vec{D}|\,(2\pi\rho L) = Q_{libre}$$

Es nula porque $\vec{D} \parallel \vec{u}_\rho$ y $d\vec{S} = dS\,\vec{k}$ son ortogonales

La carga Q_{libre} contenida dentro del cilindro de radio $\rho > R_2$ tiene dos contribuciones. La contenida en el hilo Q_{hilo} central y la depositada en el conductor cilíndrico exterior Q_{cond} luego:

$$Q_{libre} = Q_{hilo} + Q_{cond} = \lambda L + \sigma\,(2\pi R_2)$$

$$Q_{libre} = \lambda L + \left(-\frac{\lambda}{2\pi R_2}\right) \times (2\pi R_2) = 0$$

Como la carga es nula $\vec{D}_a = 0$ y $\vec{E}_a = 0$ para $\rho > R_2$

(b) En esta región $R_2 \leq \rho \leq R_1$ podemos repetir los pasos anteriores y el t^{ma} de Gauss,

$$\int_{S_b} \vec{D}_b \cdot d\vec{S}_b = \int_{\text{lados}} \vec{D}_b \cdot d\vec{S}_b + \cancelto{0}{\int_{\text{tapas}} \vec{D}_b \cdot d\vec{S}_b} = |\vec{D}_b| \, (2\pi\rho L) = Q_{libre}$$

La carga libre Q_{libre} encerrada por el cilindro de radio $R_2 \leq \rho \leq R_1$ es sólo la del hilo central

$$Q_{libre} = \lambda L \qquad |\vec{D}_b| \, (2\pi\rho \cancel{L}) = \lambda \cancel{L} \qquad \vec{D}_b = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \vec{u}_\rho$$

y el campo eléctrico es $\vec{D}_b = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_b$ con $\varepsilon_r > 1$ puesto que en esta zona hay dieléctrico.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\rho} \vec{u}_\rho \qquad \text{en} \quad R_1 \leq \rho \leq R_2$$

Podemos calcular $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$ que no es nulo en esta región donde hay material dieléctrico.

$$\vec{P}_b = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\rho} \vec{u}_\rho \qquad \vec{P}_b = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi\rho} \vec{u}_\rho$$

(c) Para $0 < \rho < R_1$ de nuevo tenemos el vacío y si aplicamos de nuevo el t^{ma} de Gauss

$$\int_{S_c} \vec{D}_c \cdot d\vec{S}_c = \int_{\text{lados}} \vec{D}_c \cdot d\vec{S}_c + \int_{\text{tapas}} \vec{D}_c \cdot d\vec{S}_c = |\vec{D}_c| \, (2\pi\rho L) = Q_{libre}$$

y la carga libre es la del hilo central $Q_\ell = \lambda L$

$$|\vec{D}_c|\,(2\pi\rho \cancel{L}) = \lambda \cancel{L} \qquad \vec{D}_c = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\,\vec{u}_\rho$$

En el vacío $\epsilon_r = 1$ con lo que el campo eléctrico es

$$\vec{D}_c = \overset{\nearrow 1}{\epsilon_r}\,\epsilon_0\,\vec{E}_c \qquad \vec{E}_c = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\,\vec{u}_\rho \qquad \rho < R_1$$

y recuperamos el campo de un hilo de carga infinito.

(b) Las densidades de carga de polarización en el dieléctrico se calculan a partir del vector $\vec{P}_b$ anterior

$$\sigma(R_2) = \vec{P}_b(R_2)\cdot\vec{n}_2 = \vec{P}_b(R_2)\cdot\vec{u}_\rho$$

$$\sigma(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{2\pi R_2}$$

El vector unitario normal a la superficie R_1 apunta hacia el hilo de carga

$$\sigma(R_1) = \vec{P}_b(R_1)\cdot\vec{n}_1 = \vec{P}_b(R_1)\cdot(-\vec{u}_\rho)$$

$$\sigma(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{2\pi R_1}$$

El vector $\vec{P}_b = P_{rb}\,\vec{u}_\rho$ sólo tiene componente a lo largo de la dirección radial. Empleando el operador divergencia en coordenadas cilíndricas se tiene.

$$\rho_v = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho P_{br}\right]$$

$$\rho_v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\cancel{\rho}\,\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{2\pi\cancel{\rho}}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{2\pi}\right] = 0$$

No hay carga de polarización volumétrica $\rho_v = 0$

Comprobamos que la carga total de polarización es nula ya que:

$$Q_{pol} = \sigma(R_1)\times S_1 + \sigma(R_2)\times S_2$$

$$Q_{pol} = \left[-\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{\cancel{2\pi R_1}}\right]\times(\cancel{2\pi R_1}\,L) + \left[\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\,\frac{\lambda}{\cancel{2\pi R_2}}\right](\cancel{2\pi R_2}\,L)$$

$$Q_{pol} = -\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\lambda L + \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\lambda L = 0$$

(c) Para calcular el potencial eléctrico tenemos que partir de un punto donde es conocido. En la region (a) donde $\vec{E}_a = 0$ el potencial es cte y como $\phi \to 0$ para $\rho \to \infty$ por continuidad el potencial del cilindro de metal es también nulo, luego $\phi_a = 0$.

Para $R_2 \le \rho \le R_1$ se tiene

$$\underbrace{\cancel{\phi_b(R_2)}}_{0\;\;=\;\phi_a=0} - \phi_b(\rho) = -\int_\rho^{R_2}\vec{E}_b\cdot \underbrace{d\vec{r}}_{d\vec{r}=\vec{u}_\rho\, d\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_r^{R_2}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\phi_b(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ln\left(\frac{R_2}{\rho}\right)$$

En la zona donde $\rho < R_1$ se tiene

por continuidad del potencial $= \phi_b(R_1)$

$d\vec{r} = \vec{u}_\rho\, d\rho$

$$\phi_c(R_1) - \phi_c(\rho) = -\int_\rho^{R_1} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_r^{R_1} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\phi_c(\rho) = \phi_c(R_1) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln}\left(\frac{R_1}{\rho}\right)$$

$$\phi_c(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \operatorname{Ln}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Ln}\left(\frac{R_1}{\rho}\right)$$

$$\phi_c(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_r} \operatorname{Ln}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \operatorname{Ln}\left(\frac{R_1}{\rho}\right)\right]$$