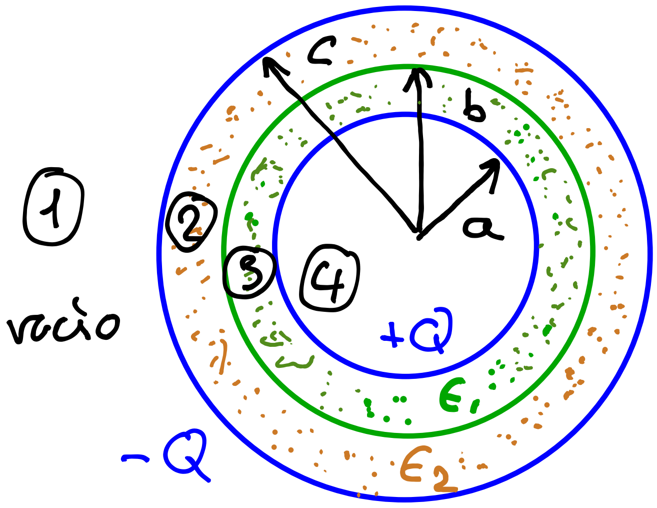

Prob: 5.9

Por simetría todos los campos tienen dirección radial $\vec{e}_r = \bar{r}/r$ y entendemos que los conductores (en azul) tienen un espesor despreciable.

Para calcular los campos empleamos el teorema de Gauss aplicado a superficies concéntricas en cada una de las zonas 1-4 del dibujo.

- Para la zona (1) $(r > c)$ estamos en el vacío $(\epsilon_r = 1)$ y para una superficie esférica S_1 de radio $r_1 > c$ se tiene;

$$\int_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{r} = |\bar{E}_1| (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{+Q - Q}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \bar{E}_1 = 0$$

y el potencial $\phi_1(r)$ es una cte.

- Para la zona $c > r > b$ donde está el dieléctrico de cte ϵ_2 empleamos $\nabla \cdot \bar{D} = \rho_\ell$ y de nuevo el teorema de Gauss para la superficie esférica de radio $c > r > b$ tendremos,

$$\int_{S_2} \bar{D}_2 \cdot d\bar{S}_2 = |\bar{D}_2| (4\pi r^2) = Q_\ell = +Q$$

carga libre que está sobre el conductor esférico de radio a

$$\vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \qquad (c > r > b)$$

y como $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_2$ el campo eléctrico en esta zona es

$$\bar{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2 r^2} \vec{e}_r$$

- Para la zona $b > r > a$ podemos repetir los pasos anteriores y tendremos

$$\vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \qquad \bar{E}_3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_1 r^2} \vec{e}_r$$

donde sólo cambia la cte. dieléctrica $\epsilon_2 \to \epsilon_1$

- Finalmente en la cavidad esférica interior para $a > r$ no hay carga y de nuevo $\epsilon_r = 1$. Para una esfera S_4 de radio $r < a$ tendremos

$$\int_{S_4} \bar{E}_4 \cdot d\bar{S}_4 = |\bar{E}_4| (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0 \to E_4 = 0$$

y el potencial $\phi_4(r)$ es entonces cte.

Para calcular los potenciales partimos de un pto. conocido $\phi \to 0$ cuando r crece luego $\phi_1(r) = 0$

y por continuidad $\phi(c) = 0$

Luego para $c > r > b$ se tiene

de nuevo es el potencial de una carga puntual de magnitud Q

$$\underset{0}{\phi_1(\cancel{c})} - \phi_2(r) = -\int_r^c \bar{E}_2 \, d\bar{r} = -\int_r^c \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2} \frac{dr}{r^2}$$

$\phi_1(c) = \phi_2(c)$ por continuidad

$$-\phi_2(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2}\int_r^c \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2}\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{r}\right]$$

$$\phi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{c}\right] \qquad c > r \geq b$$

y para que el potencial eléctrico sea una función continua ha de tenerse

$$\phi_2(b) = \phi_3(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$$

Para la otra zona con el dieléctrico ϵ_1 repetimos el mismo argumento.

$$\phi_3(b) - \phi_3(r) = -\int_b^r \bar{E}_3\, d\bar{r} = -\int_b^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1}\frac{dr}{r^2}$$

$$\phi_3(b) - \phi_3(r) = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\phi_3(r) = \phi_3(b) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\phi_3(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\phi_3(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]$$

Por continuidad $\phi_3(a) = \phi_4(a) = \text{cte}$. luego

$$\phi_4(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]$$

que es válido en $r<a$ puesto que en esta zona el potencial es cte.

La capacidad es el cociente $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\phi(a)-\phi(c)}$

como hemos visto antes

$$\phi(a) - \cancel{\phi(c)}^{\,0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$C = \frac{Q}{\phi(a)-\phi(c)} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\epsilon_1\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)} = \frac{4\pi b\,\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2\left(\frac{b}{a}-1\right)+\epsilon_1\left(1-\frac{b}{c}\right)}$$

$$C = \frac{4\pi b\,\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2\left(\frac{b}{a}-1\right)+\epsilon_1\left(1-\frac{b}{c}\right)} > 0$$

La capacidad es siempre positiva.