La espira es rectangular y su resistencia eléctrica es

Prob: 9.2

$$R = \oint \frac{dl}{A\sigma_c} = \frac{L+2L+L+2L}{A\sigma_c} = \frac{6L}{A\sigma_c}$$

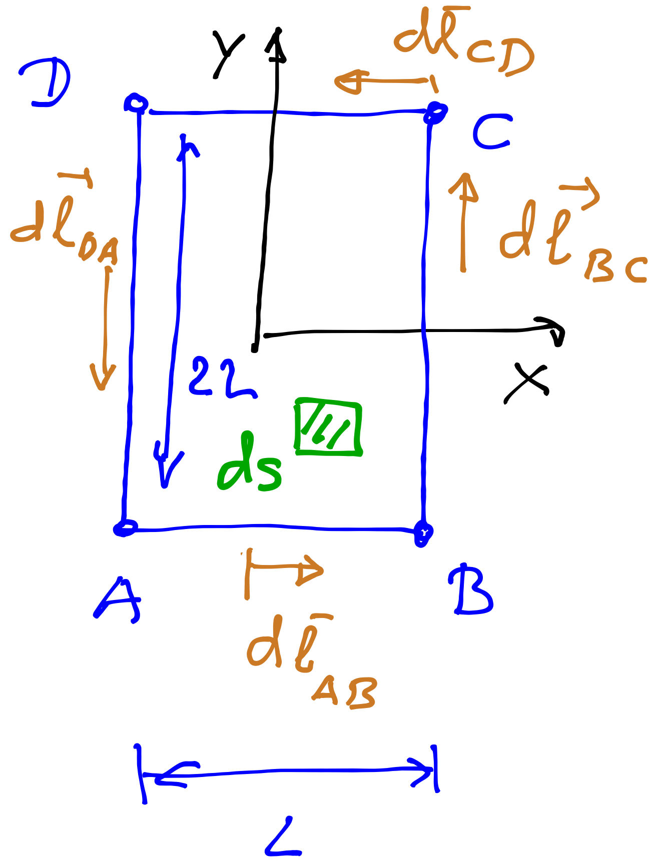
El campo de inducción magnética no es uniforme $\vec{B} = B_0 \frac{x}{L} \vec{k}$ y estacionario $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$. Nos piden calcular la corriente inducida cuando la espira se mueve respecto del observador.

Al moverse en un campo magnético no uniforme cambia el flujo de $\bar{B}$ a través de la superficie de la espira y se induce una corriente eléctrica. La ley de Faraday nos da la fuerza electromotriz.

$$\mathcal{E}_m = -\int_S \underbrace{\cancel{\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}}_{(\text{estacionario})}^{\,0} \cdot d\bar{S} + \oint_C (\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del elemento de circuito $d\vec{l}$

Dividimos la espira en tramos como en el dibujo siguiente para calcular la integral de línea.



El campo magnético es $\vec{B} = B_0 \frac{X}{L} \vec{k}$ es paralelo al vector $d\vec{S} = (dx\,dy)\,\vec{k}$ y el sentido de $d\vec{l}$ compatible con la elección de $d\vec{S}$ se indica con las flechas en marrón.

(a) Si el centro de masas de la espira se desplaza con velocidad $\vec{V}_0 = V_0 \vec{i}$ como la espira no se deforma al moverse,

$$\mathcal{E}_m = \int_A^B (\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}_{AB} + \int_B^C (\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}_{BC} + \int_C^D (\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}_{CD} + \int_D^A (\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}_{DA}$$

En cada integral hay que particularizar el valor de $\vec{B}$ a lo largo del tramo del recorrido. Para todos ellos podemos escribir

$$(\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) = (V_0 \vec{i}) \wedge (B \vec{k}) = V_0 B (\vec{i} \wedge \vec{k}) = -V_0 B \vec{j}$$

y como $d\bar{l}_{AB} = dx\,\vec{i}$ y $d\bar{l}_{CD} = -dx\,\vec{i}$ en ambos tramos el producto $(\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}$ es nulo por lo que falta calcular

$$\mathcal{E}_m = \int_B^C (\bar v_0 \wedge \bar B)\cdot d\bar l_{BC} + \int_D^A (\bar v_0 \wedge \bar B)\cdot d\bar l_{DA}$$

Tenemos

$$d\vec l_{BC} = dy\,\vec j \qquad d\vec l_{DA} = (-dy)\,\vec j$$

$$\mathcal{E}_m = \int_B^C \left[(v_0\vec i)\wedge\left(\frac{B_0 x_{BC}}{L}\bar k\right)\right]\cdot(dy\,\vec j) + \int_D^A \left[(v_0\vec i)\wedge\left(\frac{B_0 x_{DA}}{L}\bar k\right)\right]\cdot(-dy\,\vec j)$$

El valor de x hay que particularizarlo en cada tramo y en un instante genérico serán:

$$x_{BC} = \frac{L}{2} + v_0 t \qquad x_{DA} = -\frac{L}{2} + v_0 t$$ y resulta

$$\mathcal{E}_m = \left[\frac{v_0 B_0}{L}\left(\frac{L}{2}+v_0 t\right)\underbrace{[(\vec i \wedge \vec k)\cdot \vec j]}_{-\vec j}\right]\left(\int_{-L}^{+L} dy\right) +$$

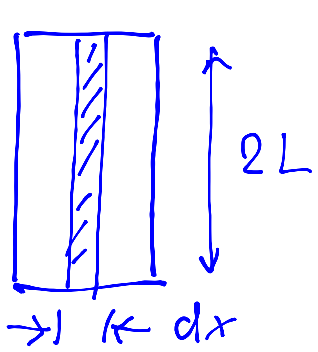
$$+\left[\frac{v_0 B_0}{L}\left(-\frac{L}{2}+v_0 t\right)[(\vec i \wedge \vec k)\cdot(-\vec j)]\right]\left(\int_{-L}^{+L} dy\right)$$

Se cancelan

$$\mathcal{E}_m = -\frac{v_0 B_0}{L}\left(\frac{L}{2}+\cancel{v_0 t}\right)(2L) + \frac{v_0 B_0}{L}\left(-\frac{L}{2}+\cancel{v_0 t}\right)(2L)$$

$$\mathcal{E}_m = -2v_0 B_0 L$$ y $$I = -\frac{A\sigma_c v_0 B_0}{3}$$

otro modo equivalente: si calculamos el flujo de $\bar B$ a través de la superficie tomando



$$d\bar S = dS\,\vec k = (2L\,dx)\,\vec k$$

$$\phi = \int_{esp.} \bar B\cdot d\bar S = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(B_0 \frac{x}{\cancel{L}}\right)\bar k\cdot(2\cancel{L}\,dx)\,\vec k$$

Las límites se toman para un instante genérico $\quad x_{min} = -\frac{L}{2} + v_0 t \quad x_{max} = \frac{L}{2} + v_0 t$

$$\phi = 2B_0 \int_{-\frac{L}{2}+v_0 t}^{+\frac{L}{2}+v_0 t} x\,dx = \cancel{2}B_0 \left[\frac{x^2}{\cancel{2}} \right]_{-\frac{L}{2}+v_0 t}^{+\frac{L}{2}+v_0 t}$$

$$\phi = B_0 \left[\left(\frac{L}{2} + v_0 t \right)^2 - \left(-\frac{L}{2} + v_0 t \right)^2 \right]$$

$$\phi = B_0 \left[\cancel{\frac{L^2}{4}} + 2v_0 t L + \cancel{(v_0 t)^2} - \cancel{\frac{L^2}{4}} + 2(v_0 t) L - \cancel{(v_0 t)^2} \right]$$

$$\phi = 2B_0 L_0 V_0 t \rightarrow \mathcal{E}_m = -\frac{d\phi}{dt} = -2B_0 L_0 V_0$$

y con $I = \mathcal{E}_m / R$ se tiene el mismo resultado que antes.

(b) Repetimos el cálculo anterior pero ahora la espira se mueve a lo largo del eje Y con velocidad $\bar{V}_0 = V_0 \vec{J}$. Tendremos

$$(\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) = (V_0 \bar{J}) \wedge (B\bar{K}) = V_0 B \, (\bar{J} \wedge \bar{K}) = V_0 B \cdot \vec{I}$$

Ahora son nulas las contribuciones de los tramos BC y DA puesto que $d\bar{l}_{BA} \parallel \vec{J}$ y $d\bar{l}_{DA} \parallel \vec{J}$

Nos queda entonces,

$$\mathcal{E}_m = \int_A^B (\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l}_{AB} + \int_C^D (\bar{V}_0 \wedge \bar{B})\, d\bar{l}_{CD}$$ donde

$$d\bar{l}_{AB} = dx\,\vec{i} \quad y \quad d\bar{l}_{CD} = -dx\,\vec{i}$$

$$(\bar{V}_0 \wedge \bar{B}) = (V_0 \bar{j}) \wedge \left(\frac{B_0}{L} x\,\bar{k}\right) = \frac{V_0 B_0}{2} x\,(\bar{j} \wedge \bar{k}) = \frac{V_0 B_0}{2} x\,\vec{i}$$

Luego

$$\mathcal{E}_m = \left[\int_{-L/2}^{+L/2} \left(\frac{B_0 V_0}{2} x\right) dx - \int_{-L/2}^{+L/2} \left(\frac{B V_0}{2} x\right) dx\right] = 0$$

las dos integrales son iguales y se cancelan

luego $I = 0$

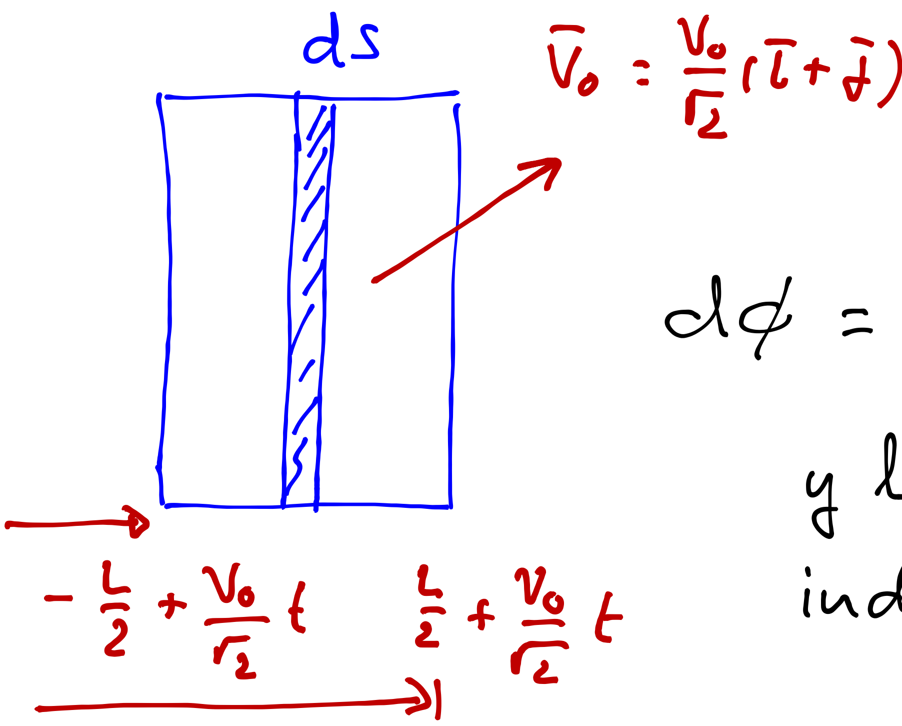
<u>Otro modo equivalente</u>: Repetimos el cálculo del flujo

$$\phi = \int_{esp.} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{B_0}{\cancel{L}} x\,\bar{k}\right) \cdot (2\cancel{L} dx\,\bar{k})$$

$$\phi = 2B_0 \int_{-L/2}^{+L/2} x\,dx = 0$$

Ahora las coordenadas x no cambia en el movimiento de la espira.

(c) Para $\vec{v}_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ la espira se mueve en sentido diagonal. De nuevo es el mismo cálculo y es más engorroso utilizar la integral de línea.



Calculamos primero el flujo como antes

$$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{B_0 x}{L}\vec{k}\right)\cdot\left(2L\,dx\,\vec{k}\right)$$

y los límites de x son los que indica en rojo el dibujo

$$\phi = \int_{-\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}}^{\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}} \frac{B_0 x}{\cancel{L}}\,2\cancel{L}\,x\,dx = 2B_0\int_{-\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}}^{\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}} x\,dx$$

$$\phi = \cancel{2}B_0\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_{-\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}}^{\frac{L}{2}+V_0 t/\sqrt{2}}$$

$$\phi = B_0\left[\left(\frac{L}{2}+\frac{V_0 t}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-\frac{L}{2}+\frac{V_0 t}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$\phi = B_0\left[\cancel{\frac{L^2}{4}}+\frac{2}{\sqrt{2}}V_0 t L+\cancel{\frac{V_0^2 t^2}{2}}-\cancel{\frac{L^2}{4}}+\frac{2}{\sqrt{2}}V_0 t L-\cancel{\frac{V_0^2 t^2}{2}}\right]$$

$$\phi = 2B_0\frac{2}{\sqrt{2}}V_0 L_0 t = 2\sqrt{2}\,B_0 V_0 t$$

y entonces

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\phi}{dt} = -2\sqrt{2}\,B_0 V_0 \qquad I = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$$

$$I = \frac{A\sigma_c}{6L} \times \left(-2\sqrt{2}\,B_0 V_0\right)$$

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{3} A \sigma_c B_0 V_0$$