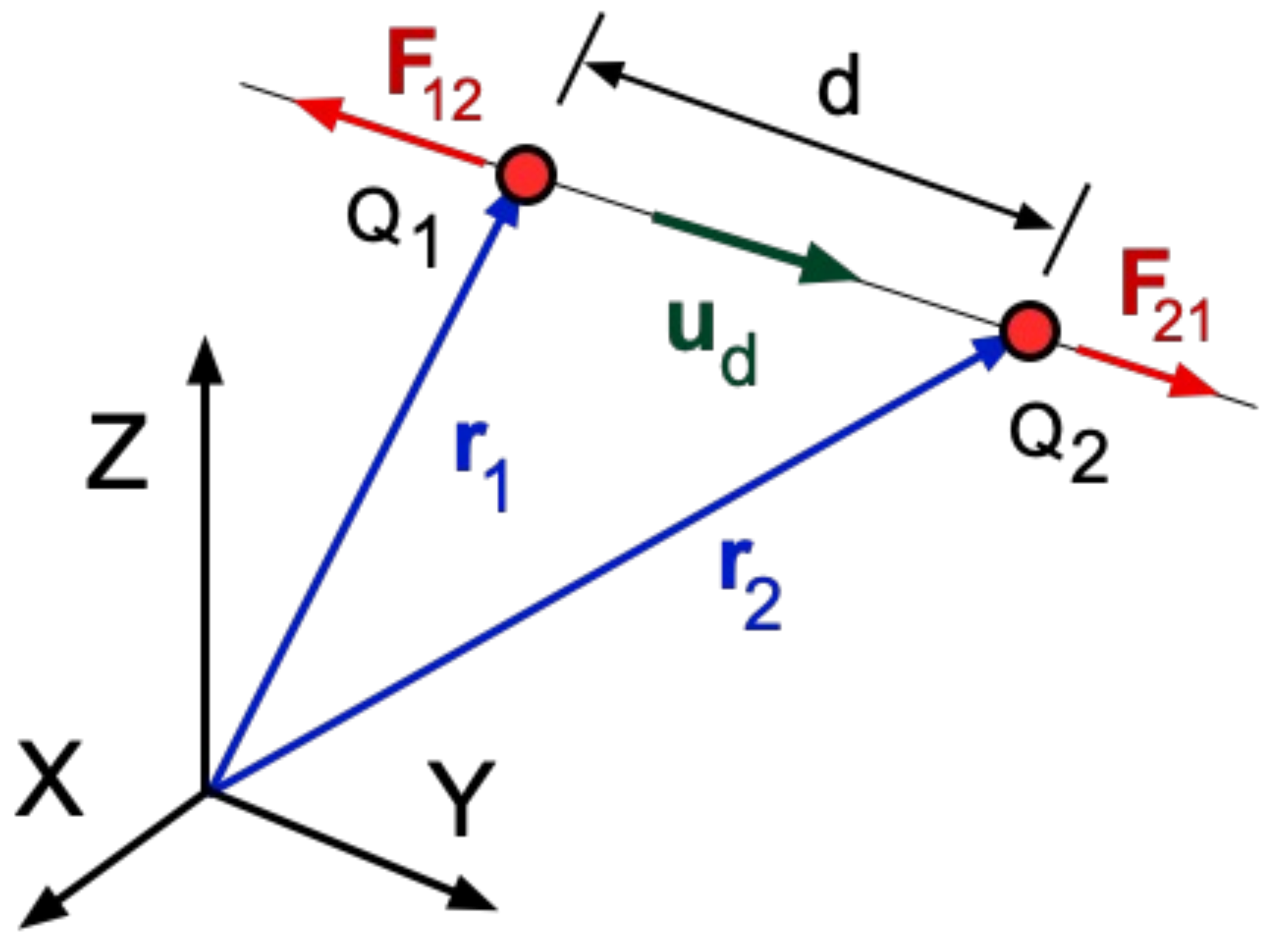
Fuerza entre dos cargas puntuales (Ley de Coulomb)

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^2}\frac{(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o d^2}\,\boldsymbol{u}_d \qquad F_{21} = Q_2\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2)$$

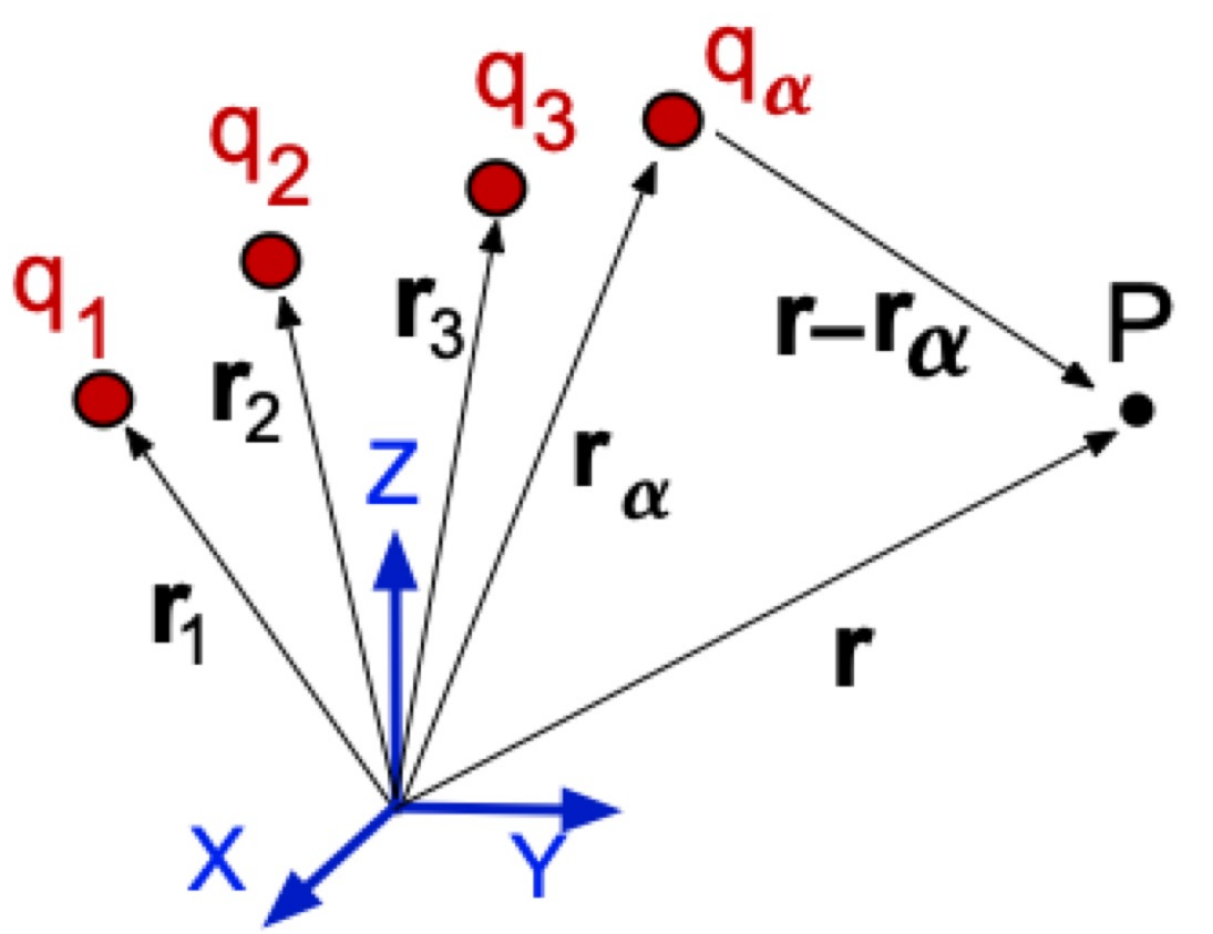


- **Campo eléctrico:** Fuerza ejercida sobre la unidad de carga positiva

Campo eléctrico de una carga puntual Q

$$\boldsymbol{E}_Q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q|}$$

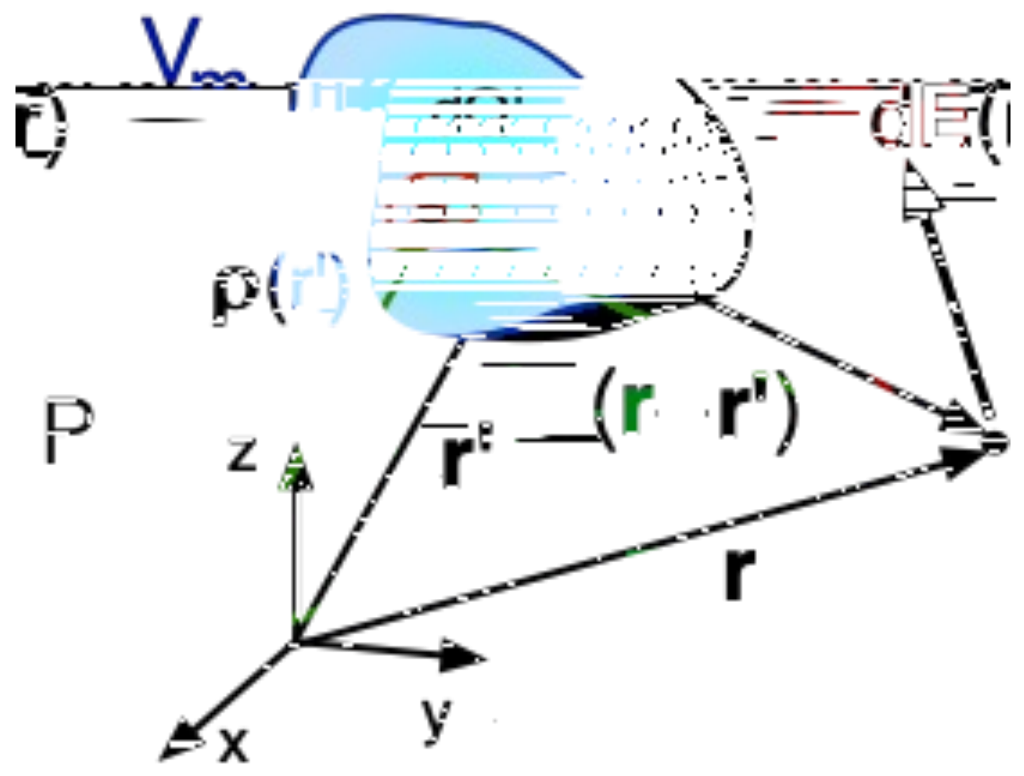
$$F_{Q'} = Q'\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$$



- **Principio de superposición:** Campo creado por $\alpha = 1, 2, \ldots N$ cargas puntuales Q_α

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} E_\alpha(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{Q_\alpha}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\alpha|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\alpha)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\alpha|}$$

- Generalización: para una distribución de carga continua



$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dQ'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_{V_m}\frac{\rho_c(r')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV$$

Distribuciones de carga

$$\begin{cases} dQ' = \rho_c(\boldsymbol{r}')\,dx\,dy\,dz \\ dQ' = \sigma_c(\boldsymbol{r}')\,dx\,dy \\ dQ' = \lambda_c(\boldsymbol{r}')\,ds \end{cases}$$

- El potencial electrostático: es el trabajo efectuado por el campo eléctrico para mover la unidad de carga positiva ente dos puntos

$$\begin{cases} \Delta W_{ab} = W_b - W_a = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} Q\,\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \\ \phi(\boldsymbol{r}_b) - \phi(\boldsymbol{r}_a) = -\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \qquad \nabla\wedge\boldsymbol{E} = \nabla\wedge(-\nabla\phi) = 0$$

Carga puntual $\phi_Q(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q|}$

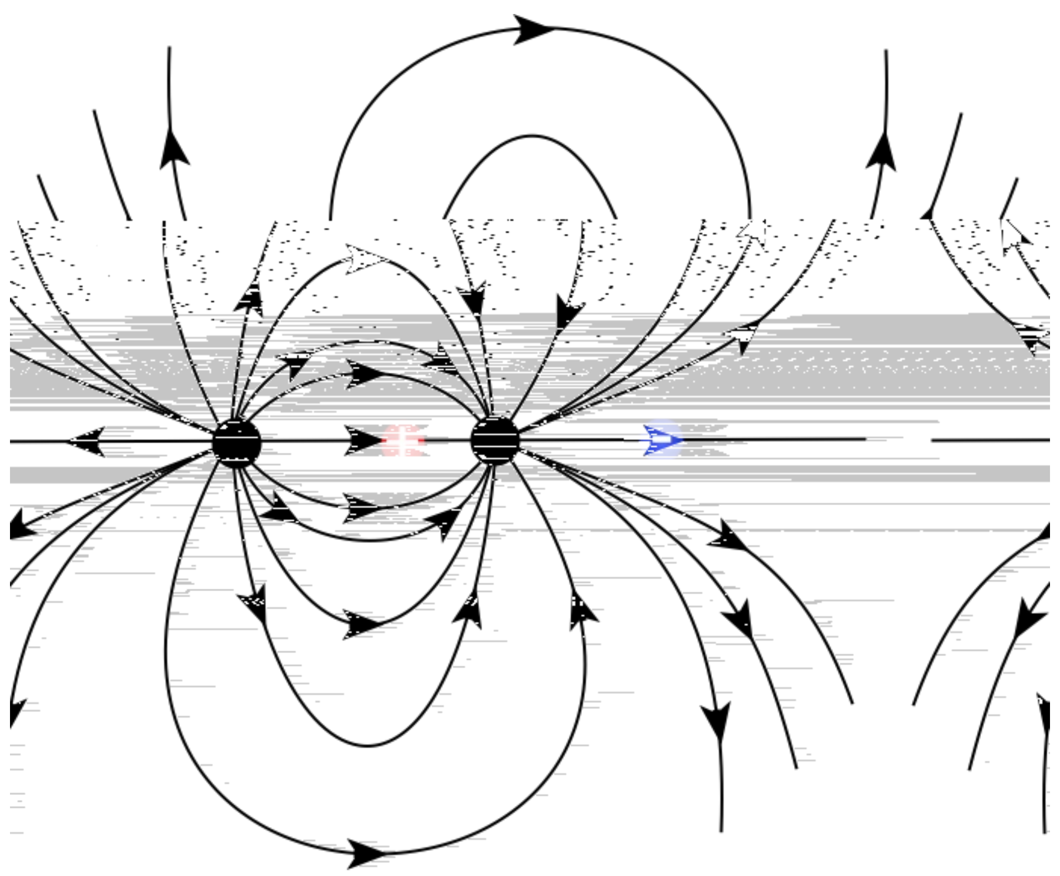
Superposición: para $\alpha = 1,2,\dots,N$ cargas puntuales Q_α $\quad \phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N}\phi_\alpha(\boldsymbol{r})$

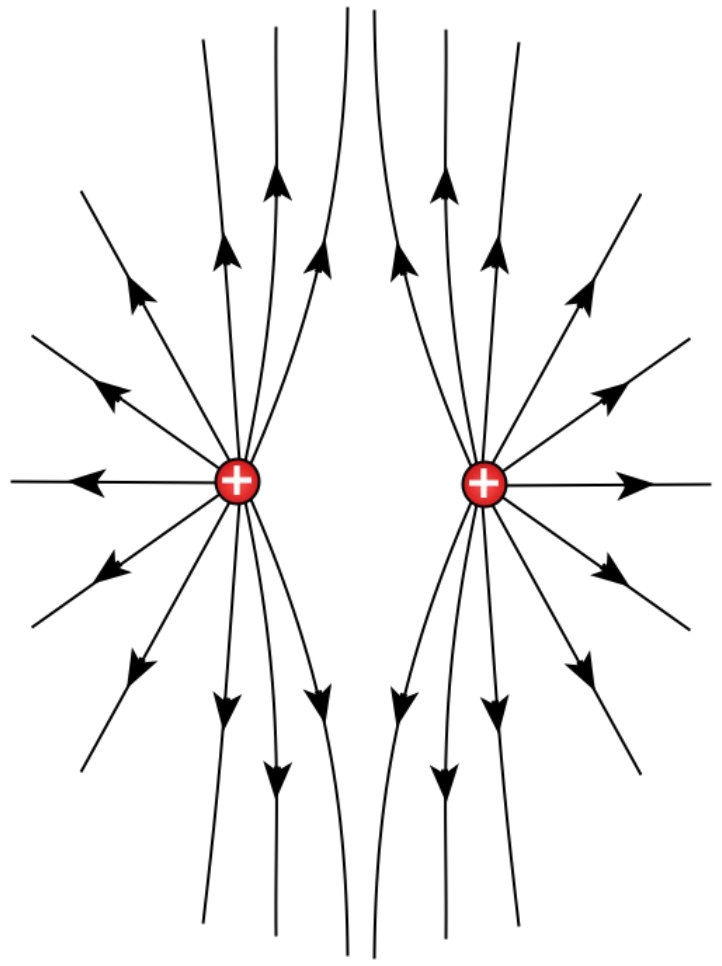
- Generalización: para una distribución de carga

$$d\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dQ'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint_{V_m}\frac{\rho_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV$$

- **Líneas de campo:** Curvas cuya tangente en cada punto coincide con la dirección del campo eléctrico. Van de la carga positiva a la negativa

Las superficies de potencial constante son perpendiculares a las líneas de campo





Como ( ) el campo apunta en la dirección en que disminuye potencial eléctrico

- **Teorema de Gauss en la electrostática:**

Para cargas
α puntuales

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha$$

Distribución c
continua de carga

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_o}\iiint_{V(S)} \rho_c(\boldsymbol{r}')dV' = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_o}$$

Ecuación fundamental de la electrostática

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_o}}$$

- **Trabajo del campo eléctrico**

$$W_{ab} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = Q\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = (-Q)\int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{l} = (-Q)[\phi(\boldsymbol{r}_b)-\phi(\boldsymbol{r}_a)] = (-Q)\Delta\phi$$

- **Energía electrostática:** para cargas puntuales $_i$ se tiene,

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}$$

equivalentemente,

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\phi_T(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\sum_{i\neq j}\phi_j(\boldsymbol{r}_i)\right)$$

- **Generalización:** para una distribución de carga $dU_e = \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{r}')dQ = \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{r}')\rho_c(\boldsymbol{r}')\,dV'$

La integral se extiende sobre la zona donde existe densidad de carga

$$U_e = \frac{1}{2}\iiint_{V_m}\phi(\boldsymbol{r}')\,dQ = \frac{1}{2}\iiint_{V_m}\phi(\boldsymbol{r}')\rho_c(\boldsymbol{r}')dV'$$

Densidad de energía electrostática

$$u_e(\boldsymbol{r}') = \frac{dU_e}{dV'} = \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{r}')\rho_c(\boldsymbol{r}')$$

La integral se extiende sobre todo el espacio donde existe el campo eléctrico.

$$U_e = \iiint_{Esp.}\frac{\varepsilon_o}{2}|\boldsymbol{E}|^2\,dV$$

Densidad de energía electrostática

$$u_e(\boldsymbol{r}') = \frac{\varepsilon_o}{2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')|^2$$