

Introducción a la Física de los Plasmas Granulares

Luis Conde
Departamento de Física Aplicada
E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

En estas notas se desarrolla una breve introducción a la física de los plasmas granulares (*dusty plasmas*) con particular énfasis en sus aplicaciones espaciales y en la astrofísica. Los plasmas granulares son plasmas clásicos constituídos por electrones, iones y átomos neutros que además contienen granos de polvo (partículas sólidas) cargadas positiva o negativamente con un tamaño típico del orden de unas milésimas de milímetro o menor. La mayor masa de los granos $m_d \gg m_i$, m_d , su radio r_d y carga eléctrica $\pm eZ_d$ introducen nuevas escalas de longitud y tiempo no contempladas en los plasmas clásicos.

Índice

1. Introducción.	3
2. Escalas características.	5
2.1. Longitudes de Debye.	5
2.2. Frecuencias de plasma	7
2.3. Parámetro de acoplo	8
3. Plasmas granulares en el espacio.	10
4. Ecuaciones fluidas de un plasma granular	13
4.1. Fuerzas de fricción	13
4.2. Fuerzas entre partículas	14
4.3. Fuerzas sobre los granos de polvo.	15
4.3.1. Fuerza de arrastre de los átomos neutros.	16
4.3.2. Fuerza de arrastre de los iones.	17
4.4. Ecuaciones de transporte	19

5. Ondas acústicas en un plasma granular.	20
5.1. Onda acústica para los granos de polvo (DA)	20
5.2. Onda acústica ion-grano (DIA).	22
5.3. Otra aproximación a las ondas DIA.	24
5.4. Adimensionalización.	24

1. Introducción.

Los plasmas granulares o plasmas con granos de polvo (*dusty plasmas*) pueden definirse como gases parcialmente ionizados cuyos constituyentes son electrones, iones, átomos neutros y partículas sólidas masivas, cargadas positiva o negativamente con un tamaño típico muy pequeño frente a las longitudes características del mismo.

En estos plasmas, además de las densidades de iones n_i y electrones n_e por unidad de volumen hemos de considerar la de granos de polvo n_d y la carga que estos adquieren $q_d = \pm e Z_d$. Es evidente que la presencia conjunta de granos cargados, iones y electrones es una situación muy común tanto en la naturaleza como en multitud de procesos industriales.

En estas notas nos interesamos en particular en las aplicaciones espaciales de los plasmas granulares y en sus aplicaciones en la Astrofísica. La composición de los granos de polvo que encontramos en el espacio es muy diversa, silicatos, grafito, carbón amorfo, algunos compuestos orgánicos, ...etc. Se encuentra frecuentemente hielo contaminado o sucio e incluso partículas de materiales férricos.

Uno de los ejemplos mas espectaculares de plasma granular puede observarse en las Figs. 1 y 3. Las partículas que constituyen de los anillos de Saturno se encuentran eléctricamente cargadas y se mueven dentro de la magnetosfera del planeta formando impresionantes estructuras estacionarias que poseen una estabilidad notable.

En un plasma granular hemos de tener en cuenta dos nuevas longitudes características: El radio promedio de los granos r_d y la separación entre los mismos a , que han de compararse con la longitud de Debye λ_D . Como se muestra en la Fig. 2 nos encontramos con dos situaciones extremas.

Cuando $r_d \ll \lambda_D < a$ los granos de polvo se encuentran muy separados entre sí constituyendo una colección de cuerpos aislados, sumergidos en el plasma y eléctricamente apantallados. Son entonces partículas aisladas e independientes que interaccionan con el plasma que les rodea.

Por el contrario, si $r_d \ll a < \lambda_D$, al ser la longitud de Debye la dimensión dominante, las partículas de polvo cargadas participarán del comportamiento colectivo del plasma y entonces podemos hablar en sentido estricto de un *plasma* de granos de polvo, electrones y iones.

La carga q_d que adquieren los granos es el resultado de la suma de todas las posibles corrientes $dq/dt = \sum_j I_j$ que entran y salen del mismo y en el equilibrio dicha corriente neta

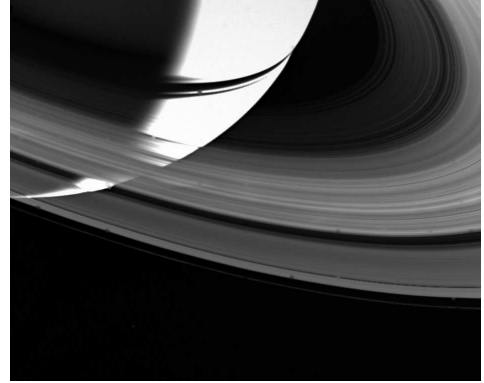


Figura 1: Estructura de los anillos del planeta Saturno. Imagen tomada por una de las sondas Voyager desde unos 3.4 millones de kilómetros.

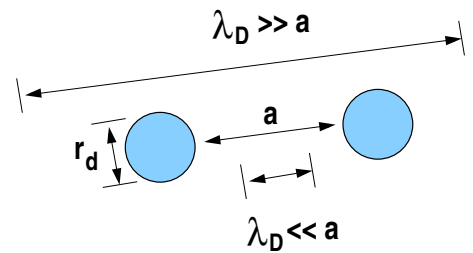


Figura 2: Comparación de las longitudes características.

ha de ser nula $\sum_j I_j = 0$. En consecuencia, las partículas sólidas adquieren un cierto potencial eléctrico φ_d respecto del entorno que puede ser positivo o negativo.

Los procesos mediante los cuales los granos adquieren carga eléctrica son diversos y dependen tanto de sus propiedades químicas como del entorno en que se encuentran. Cuando $r_d \ll \lambda_D < a$ los principales mecanismos que pueden producir partículas cargadas que contribuyen a su carga q_d y potencial eléctrico φ_d son:

- *Colección de partículas cargadas*: De acuerdo con el valor del potencial eléctrico de su superficie φ_d las especies cargadas del plasma resultan repelidas o colectadas contribuyendo entonces a su carga.
- *Emisión secundaria*: Las partículas sólidas se cargan eléctricamente si sobre su superficie impactan iones y electrones energéticos que pueden producir la emisión de electrones secundarios de su superficie.
- *Fotoemisión*: Un flujo de fotones de energía $E = h\nu$ superior a la función de trabajo $W_f \simeq 2 - 4 \text{ eV}$ del material pueden producir la emisión de electrones secundarios de la superficie del grano.
- También pueden generarse cargas mediante muchos otros mecanismos, *emisión termoiónica, ionización por impacto electrónico, radiactividad, ...etc.*

Los mecanismos de carga en el límite contrario $r_d \ll a < \lambda_D$ se complican además por la presencia de interacciones colectivas entre las partículas sólidas del plasma y también con las otras especies cargadas.

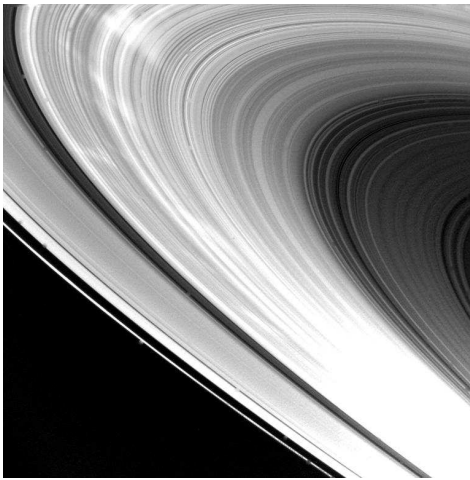


Figura 3: Detalle de la estructura radial de los anillos de Saturno.

En el equilibrio ha de satisfacerse la condición de cuasineutralidad, $Z_i n_i \pm Z_d n_d - n_e = 0$, de modo que si la densidad de granos de polvo es pequeña ($n_d \ll n_e, n_i$) su carga eléctrica Z_d ha de ser muy alta o bien la densidad de granos de polvo n_d muy elevada en el caso contrario.

En la siguiente tabla se comparan las propiedades básicas de un plasma clásico con las de un plasma granular.

En nuestro caso nos interesamos por la situación en la que los granos de polvo pueden ser tratados como una densidad (n_d) de partículas masivas ($m_d \gg m_i, m_e$), con carga eléctrica positiva o negativa ($q_d = \pm e Z_d$). Dependiendo de su naturaleza y características de la interacción con el fondo de electrones e iones que le rodea, dicha carga puede cambiar en el curso del tiempo, es decir $\partial q_d / \partial t \neq 0$.

Además, para que podamos hablar con propiedad de un plasma granular, las partículas sólidas han de contribuir al movimiento colectivo de las partículas cargadas, lo que tiene lugar cuando el producto $Z_d n_d$ es lo bastante alto como para ser comparable a la densidad de carga de electrones e iones.

Características	Plasma clásico	Plasma granular
Cuasineutralidad	$Z_i n_i - n_e = 0$	$Z_i n_i \pm Z_d n_d - n_e = 0$
Cargas	$e, Z_i e$	$e, q_i = Z_i e, q_d = Z_d e$
Dinámica de la carga.	$q_i = Z_i e$ constante	$q_i = Z_i e$ constante y $\partial q_d / \partial t \neq 0$
Masas	$m_i \gg m_e$	$m_d \gg m_i \gg m_e$
Frec. Plasma	ω_{pe}, ω_{pi}	$\omega_{pd} \gg \omega_{pe}, \omega_{pi}$
Arrastre $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_o$	Arrastre de iones para \mathbf{B}_o bajo	Arrastre de polvo cargado para \mathbf{B}_o alto

2. Escalas características.

2.1. Longitudes de Debye.

La presencia de granos cargados introduce algunas sutilezas en la longitud de Debye que gobierna el apantallamiento de los campos eléctricos en el plasma. Para analizar este efecto partimos de la ecuación de Poisson en una dimensión,

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{e}{\epsilon_o} (Z_i n_i \pm Z_d n_d - n_e)$$

y de dos poblaciones de equilibrio iónica y electrónica con temperaturas $K_B T_i$ y $K_B T_e$ respectivamente,

$$n_i = n_{io} \exp\left(-\frac{e\varphi}{K_B T_i}\right) \quad n_e = n_{eo} \exp\left(\frac{e\varphi}{K_B T_e}\right).$$

Por el contrario, la densidad de granos de polvo la tomaremos como un fondo uniforme de densidad de carga $\pm e Z_d n_d$. Es decir, los consideramos *fríos* ($K_B T_i, K_B T_e \gg K_B T_d$), por ser muy masivos y no tendremos en cuenta los efectos de la temperatura de los granos.

Las pequeñas fluctuaciones de la carga eléctrica local causadas por los electrones y iones nos alejan ligeramente del estado de equilibrio del plasma, $\varphi(\mathbf{r}, t) \simeq \varphi_{eq} + \varphi_1$ con $\varphi_{eq} = 0$. Cuando las energías térmicas de ambas especies son grandes comparadas con la amplitud de las fluctuaciones de la energía electrostática ($e\varphi_1 / K_B T_e \ll 1$ y $e\varphi_1 / K_B T_i \ll 1$) podremos sustituir las exponenciales por sus desarrollos en serie,

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \simeq -\frac{e}{\epsilon_o} \left[(Z_i n_{io} \pm Z_d n_d - n_{eo}) - n_{eo} \frac{e\varphi_1}{K_B T_e} - Z_i n_{io} \frac{e\varphi_1}{K_B T_i} \right].$$

Dentro del paréntesis el primer término es justamente la condición de cuasineutralidad del plasma en el estado de equilibrio, $Z_i n_{io} \pm Z_d n_d - n_{eo} = 0$ y la ecuación de Poisson se convierte en,

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = \left(\frac{n_{eo} e^2}{\epsilon_o K_B T_e} + \frac{Z_i n_{io} e^2}{\epsilon_o K_B T_i} \right) \varphi_1$$

introduciendo una longitud característica Λ ,

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_1 \quad , \quad \frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2},$$

las soluciones de esta ecuación que satisfacen que $\varphi(\pm\infty) \rightarrow 0$ son,

$$\varphi_1(r) = \varphi_{1o} \exp(-|z|/\Lambda)$$

Nos aparecen los dos parámetros característicos del plasma, las *longitudes de Debye electrónica* λ_{De} y *iónica* λ_{Di} . En un plasma clásico suele considerarse sólo la mayor λ_{De} debido a que la temperatura de la especie iónica es menor que la electrónica y $n_{eo} = n_{ei}$, sin embargo, en un plasma granular son distintas $K_B T_e$ y $K_B T_i$ así como las densidades n_{eo} y n_{io} .

El signo de la carga de los granos de polvo y condición de cuasineutralidad nos lleva a dos límites de interés puesto que el apantallamiento del campo eléctrico en el plasma dependerá de la especie cargada dominante:

- Con *granos cargados positivamente*, $Z_i n_{io} + Z_d n_{do} = n_{eo}$ y tiene que tenerse $n_{eo} > n_{io}$ para que exista equilibrio de cargas. Aunque $K_B T_e \gg K_B T_i$ puede suceder que

$$\frac{K_B T_i}{Z_i n_{io}} \gg \frac{K_B T_e}{n_{eo}}$$

Si la mayor temperatura electrónica no compensa la reducción de la densidad iónica tendremos $\Lambda \cong \lambda_{De}$. En consecuencia, si los *granos de polvo tienen carga positiva*, el *apantallamiento* viene dictado por λ_{De} , es decir, la *densidad* n_{eo} y la *temperatura electrónica* $K_B T_e$.

- Por el contrario, con granos cargados negativamente $Z_i n_{io} = Z_d n_{do} + n_{eo}$ tendremos que $n_{io} \gg n_{eo}$ lo que invierte la desigualdad anterior,

$$\frac{K_B T_i}{Z_i n_{io}} \ll \frac{K_B T_e}{n_{eo}}$$

y ahora $\Lambda \cong \lambda_{Di}$. Con *granos de polvo con carga negativa*, el apantallamiento eléctrico viene dictado por la *densidad* n_{io} y la *temperatura iónica* $K_B T_i$.

En un plasma clásico constituido por electrones y iones exclusivamente suele tenerse que $K_B T_e \gg K_B T_i$ lo que permite considerar un fondo de iones uniforme. El apantallamiento de los campos eléctricos, sobre una escala de longitud λ_{De} es debido principalmente a los electrones que son más móviles. Como vemos, un fondo uniforme de una tercera especie cargada negativamente $-Z_d n_d$ introduce una escala de longitud diferente λ_{Di} para el apantallamiento de los campos eléctricos cuando la carga de los granos es negativa.

Este hecho tiene consecuencias en lo que se refiere a la estructura de las vainas electrostáticas que se forman alrededor de electrodos metálicos inmersos en el plasma. La anchura de las mismas dependerá no sólo de la longitud de Debye electrónica como sucede en los plasmas clásicos, sino de acuerdo con el signo de la carga de los granos, también de la iónica.

2.2. Frecuencias de plasma

Para estudiar las escalas de tiempo de un plasma granular consideramos oscilaciones de pequeña amplitud de todas las variables alrededor de un estado de equilibrio del mismo. Para cada especie cargada escribiremos la ecuación de continuidad y de transporte de cantidad de movimiento ($\alpha = e, i, d$ que serán respectivamente electrones, iones y granos de polvo),

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (1)$$

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha \right) = -q_\alpha n_\alpha \nabla \varphi - \mathbf{R}_\alpha \quad (2)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{e}{\epsilon_0} (Z_i n_i \pm Z_d n_d - n_e) = 0 \quad (3)$$

donde $q_e = -e$, $q_i = eZ_i$ y $q_d = eZ_d$ siendo $e = |e| > 0$. La fuerza de fricción entre las distintas especies \mathbf{R}_α los vamos tomar como despreciables ya que perturbamos alrededor de un estado de equilibrio.

Estas ecuaciones se linealizan tomando $n_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_{\alpha o} + n_{\alpha 1}$, $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{\alpha o} + \mathbf{u}_{\alpha 1}$ y $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_o + \varphi_1$ siendo $n_{\alpha o} \gg n_{\alpha 1}$. En el estado de equilibrio consideramos que las especies están en reposo ($\mathbf{u}_{\alpha o} = 0$) y que el potencial de plasma es uniforme ($\varphi_o = 0$), asimismo ha de satisfacerse el equilibrio de cargas $Z_i n_{i o} \pm Z_d n_{d o} - n_{e o} = 0$. Despreciando los términos de segundo orden resultan las siguientes ecuaciones lineales para las amplitudes de perturbación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\alpha 1}}{\partial t} + n_{\alpha o} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha 1} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha 1}}{\partial t} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \varphi_1 &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_1 + \frac{1}{\epsilon_0} (q_i n_{i 1} + q_d n_{d 1} - q_e n_{e 1}) &= 0 \end{aligned}$$

Derivamos la primera respecto del tiempo y tomamos la divergencia de la segunda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_{\alpha 1}}{\partial t^2} + n_{\alpha o} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha 1}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha 1}}{\partial t} \right) &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla^2 \varphi_1 \end{aligned}$$

y sustituyendo obtenemos para cada especie α del plasma,

$$\frac{\partial^2 n_{\alpha 1}}{\partial t^2} - \frac{n_{\alpha o} q_\alpha}{m_\alpha} \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

Podemos multiplicar cada ecuación por la carga q_α correspondiente y sumarlas,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [q_i n_{i1} + q_d n_{d1} - q_e n_{e1}] - \nabla^2 \varphi_1 \left[\frac{n_{io} q_i^2}{m_i} + \frac{n_{do} q_i^2}{m_d} + \frac{n_{eo} q_e^2}{m_e} \right] = 0$$

siendo primer paréntesis igual a $-\epsilon_o \nabla^2 \varphi_1$ y permutando la derivada temporal con el operador ∇ resulta,

$$\nabla^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \left(\frac{n_{io} q_i^2}{\epsilon_o m_i} + \frac{n_{do} q_i^2}{\epsilon_o m_d} + \frac{n_{eo} q_e^2}{\epsilon_o m_e} \right) \varphi_1 \right] = 0$$

donde el interior del corchete ha de ser nulo. Nos encontramos con la ecuación de un oscilador armónico para las amplitudes de perturbación φ_1 del potencial del plasma,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \omega_p^2 \varphi_1 = 0$$

En el estado de equilibrio el potencial del plasma fluctúa con oscilaciones de amplitud φ_1 pequeña y con una frecuencia característica que será la suma de las correspondientes a todas las especies presentes en el plasma,

$$\omega_p^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pd}^2 + \omega_{pe}^2$$

y podemos definir para cada especie cargada α una frecuencia característica, $\omega_{p\alpha}^2 = q_a^2 n_{\alpha o} / \epsilon_o m_\alpha$ entre las que existirá evidentemente una gran diferencia dada la disparidad de las masas de cada constituyente. Además, han de ser mayores que todas las frecuencias colisionales,

$$\nu_{ea}, \nu_{ia}, \nu_{da}, \dots \ll \omega_p$$

2.3. Parámetro de acoplo

Si suponemos simetría esférica, el potencial que crea un grano de carga q_d inmerso en un plasma viene dado por,

$$\varphi(r) = \frac{q_d}{r} e^{(-r/\Lambda_D)}$$

y podemos comparar la energía electrostática $E_{el} = q_d \varphi(a)$ de otra carga idéntica situada a una distancia a con su energía térmica $E_T \sim K_B T_d$.

$$\Gamma = \frac{q_d^2}{a K_B T_d} e^{(-a/\Lambda_D)}$$

El plasma se dice *fuertemente acoplado* cuando $\Gamma \gg 1$ puesto que entonces dominan las fuerzas eléctricas entre los granos frente a sus energías térmicas y *débilmente acoplado* en el caso contrario $\Gamma \ll 1$. Como se muestra en la Fig. 2 el potencial eléctrico resulta apantallado según la razón de longitudes a/Λ que compite con la energía térmica. La magnitud del acoplo entre los granos del plasma depende entonces de:

- La magnitud de la carga del grano $q_d = e Z_d$.
- La relación entre la distancia entre granos a y la longitud de Debye Λ_D . La densidad n_d se encuentra también involucrada puesto que $n_d \sim 1/a^3$
- La energía térmica $E_T \sim K_B T_d$.

Cuando el acoplo es elevado y dominan las fuerzas eléctricas y la posición de las partículas sólidas en el plasma resulta del balance de las fuerzas que actúan sobre las mismas. Puesto que no poseen energía térmica suficiente para desplazarse a distancias importantes de sus posiciones de equilibrio. Se desarrollan en el plasma estructuras ordenadas de granos (*dusty crystals*) que interactúan entre sí de modo semejante a los átomos en un coloide .

En la Fig. 4 puede observarse una imagen de uno de estos cristales donde puede observarse como los puntos iluminados que corresponden a los granos de polvo forman estructuras ordenadas.

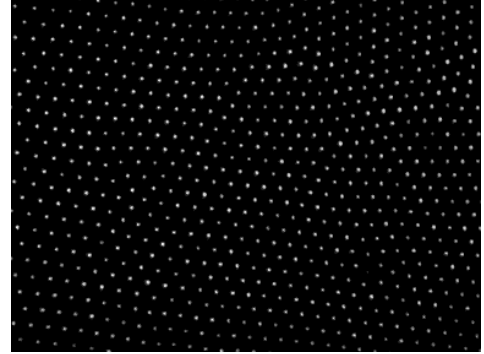


Figura 4: Cristal de plasma donde los granos (puntos iluminados) forman estructuras ordenadas.

3. Plasmas granulares en el espacio.

Los plasmas granulares se encuentran presentes en muchos ámbitos de la naturaleza. En el espacio existe gran cantidad de materia en forma de polvo, pequeños cristales de hielo, ...etc. inmersos en un plasma ambiente que son susceptibles de cargarse eléctricamente cuando son ionizados por la radiación ultravioleta y/o mediante el impacto de partículas energéticas.



Figura 5: Detalle de uno de los anillos de Urano, mas estrecho que los de Saturno.

A continuación vamos a examinar los valores característicos de algunos plasmas granulares en el espacio, la concentración y naturaleza de los granos de polvo ha sido determinada esencialmente a partir de la magnitud y composición espectral de la luz que absorben.

En el espacio interestelar el contenido en gas decrece con el tiempo a medida que nuevas generaciones de estrellas se forman por el colapso gravitatorio de nubes gigantes de gas neutro. La presencia de polvo en este espacio entre las estrellas se conoce desde hace tiempo y esta formado partículas tanto dieléctricas (hielos, silicatos, ...etc.) como metálicas (grafitos o carbonos amorfos). Los valores característicos del plasma interestelar son los siguientes:

Nubes Interestelares

$n_e = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$	$n_d = 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$	$n_a = 10^4 \text{ cm}^{-3}$
$K_B T_e = 10^{-3} \text{ eV}$	$r_d = 0,2 \mu\text{m}$	$r_d / \lambda_{De} \leq 0,3$
$ Z_d \sim 1$	$a / \lambda_{De} \sim 0,2$	

Nuestro sistema solar se encuentra igualmente lleno de partículas de polvo de origen y composición muy variada a partir del cual se supone fue formado nuestro sistema planetario. Esta originado por cometas y/o material del cinturón de asteroides donde nos encontramos con un plasma de una densidad electrónica de unos ocho órdenes de magnitud superior y bastante mas caliente.

Plasma Interplanetario (Disco de polvo zodiacal)

$n_e = 5 \text{ cm}^{-3}$	$n_d = 10^{-12} \text{ cm}^{-3}$	$ Z_d = 10^4$
$K_B T_e = 10 \text{ eV K}$	$r_d = 2 - 10 \mu\text{m}$	$a / \lambda_{De} \leq 5$

Los cometas son cuerpos pequeños constituídos por una mezcla de gases de material no volátil y gases congelados que describen órbitas muy elípticas que los acercan al sol para luego

alejarnos hacia el espacio profundo. Tienen un núcleo pequeño (por debajo de 10 Km de diámetro) y a medida que se aproximan al sol desarrollan una cola luminosa que se extiende a lo largo de varios millones de kilómetros en sentido opuesto. Lejos del sol el material permanece congelado en el interior del núcleo que cuando encuentra a unas pocas unidades astronómicas de la estrella comienza a calentarse evaporándose las sustancias más volátiles. De este modo se forma una cola compuesta de polvo y gas que absorbe la radiación ultravioleta, principalmente por el hidrógeno que contiene, que además de ionizarse escapa a su gravedad. Las características del plasma de un cometa medidas en algunas misiones espaciales (Vega, Giotto) son las siguientes.

Cometa Halley

Propiedades	Dentro ionopausa	Fuera de la ionopausa
$n_e (cm^{-3})$	$10^3 - 10^4$	$10^2 - 10^3$
$K_B T_e (eV)$	$\leq 0,1$	~ 1
$n_d (cm^{-3})$	10^{-3}	$10^{-8} - 10^{-7}$
$n_a (cm^{-3})$	10^{10}	–
$r_d (\mu m)$	$0,1 - 10$	$0,01 - 10$
$ Z_d $	$10 - 10^3$	$10 - 2 \times 10^4$
a/λ_{De}	≥ 1	≥ 10

Los anillos planetarios que existen alrededor de los planetas gigantes (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) están compuestos de partículas que orbitan alrededor del planeta. Los primeros en ser descubiertos fueron los de Saturno en las primeras observaciones con telescopios desde la tierra mientras que los de Júpiter, Urano y Neptuno -más pequeños- fueron fotografiados durante las misiones del programa Voyager en las que se tomaron imágenes como la de las figuras 1 y 3.

Las observaciones revelaron una estructura mucho compleja de los que se esperaba, constituida por anillos concéntricos y huecos entre ellos que no podía observarse desde nuestro planeta. Urano también posee un sistema de anillos más delgados que no se perciben desde la Tierra uno de los cuales se aprecia en la figura 5.

La gran estructura anular del planeta Saturno está constituida por diversos anillos concéntricos formados por partículas sólidas y de hielo cuyos diámetros van desde la milésima de milímetro hasta el metro. Dicha estructura podría explicarse mediante un modelo que considera la hipótesis de que los saltos entre anillos consecutivos contienen granos de polvo micrométricos cargados y sometidos a las fuerzas electromagnéticas que existen en la magnetosfera del planeta. Los anillos se etiquetan mediante letras del alfabeto y las propiedades de dos de ellos y los huecos entre los mismos se encuentran en la siguiente tabla.

Anillos de Saturno

Propiedades	Anillo E	Anillo F	Hueco
$n_e (cm^{-3})$	~ 10	~ 10	$0,1 - 10^2$
$n_a (cm^{-3})$	1	–	–
$n_d (cm^{-3})$	10^{-7}	≤ 10	~ 1
$K_B T_e (eV)$	10 – 100	10 – 100	$\sim 10^4$
$r_d (\mu m)$	~ 1	1	~ 1
Z_d	$\sim 10^4$	$\sim 10 - 10^2$	~ 10
a/λ_{De}	0,1	$\leq 10^{-3}$	$\leq 10^{-2}$

También se observan en el espacio cercano a la Tierra plasmas granulares, siendo la principal fuente de este polvo la polución espacial. Esta última esta originada por emisiones de material que provienen de cohetes y vehículos orbitales. Una vez se encuentran en órbita la desgasificación de sus superficies y las emisiones de sus motores provocan la aparición en la atmósfera de polvo de aluminio y cristales de hielo. En su 90% son esferoides de óxidos de aluminio (Al_2O_3) con tamaños de $0,1 - 10 \mu m$, también trozos de hielo y micrometeoritos. Las características y el origen de estos granos de polvo son las siguientes:

Entorno terrestre.

Origen	Composición	Radio (μm)	Densidad (cm^{-3})
Emisiones del <i>Shuttle</i>	hielo sucio	5×10^{-3}	3×10^4
Aerosol terrestre	Al_2O_3	0,1 – 10	$10^{-10} - 10^{-6}$
Micrometeoritos	diversa	5 – 10	$10^{-10} - 10^{-9}$
Contaminación industrial	magnetita	~ 10	10^{-5}

Por último, también compararemos las propiedades típicas de los plasmas granulares que producen una llama que resultan ser obviamente similares a los que produce el motor de un cohete. La combustión de gases eleva la temperatura de sus productos de reacción que resultan ionizados en parte. Si son emitidos al espacio estos a su vez se congelan rápidamente dando lugar a pequeños cristales de hielo cargados eléctricamente. Esta nubes de material orbitan también alrededor del vehículo e interaccionan con el plasma ionosférico.

**Emisiones de llamas
y de motores cohete**

Propiedades	Motores	Llamas
$n_e (cm^{-3})$	10^{12}	$> 10^{11}$
$K_B T_e (eV)$	0,3	0,2
$n_d (cm^{-3})$	3×10^8	10^{11}
$n_a (cm^{-3})$	3×10^{18}	5×10^{18}
$r_d (\mu m)$	0,5	0,01
$ Z_d $	10^2	2
a/λ_{De}	2	0,5

4. Ecuaciones fluidas de un plasma granular

4.1. Fuerzas de fricción

En las ecuaciones [1-3] para el estado de equilibrio hemos considerado cada especie como independiente, no hemos tenido en cuenta las posibles interacciones mutuas entre granos de polvo, iones, ...etc. Para establecer las ecuaciones fluidas de movimiento hemos de determinar la fuerza de fricción \mathbf{R}_α que ejercen todas las demás especies sobre la α ,

$$\mathbf{R}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{R}_{\alpha\beta}$$

siendo $\alpha, \beta = i, e, d, a$ donde a representa los átomos neutros. Tienen dimensiones de fuerza por unidad de volumen y para determinarlas necesitamos desarrollar modelos de los procesos colisionales e integrar sobre las funciones de distribución $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ de las especies involucradas.

Los modelos mas simples proporcionan expresiones de la forma,

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta} n_\beta \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$$

en donde $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ es la masa reducida y $\nu_{\alpha\beta}$ la frecuencia de colisión. El vector $\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$ representa la fuerza por unidad de volumen que la especie β ejerce sobre la α evidentemente $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha}$ resultando nula en el equilibrio puesto que $\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta = 0$.

Para el caso sencillo de una colisión elástica, la frecuencia $\nu_{\alpha\beta} = 1/\tau_c$ es el inverso del tiempo medio τ_c que transcurre entre dos colisiones sucesivas entre ambas especies de partículas. Podemos estimarlo mediante,

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{V_{T\beta}}{\lambda_{\alpha\beta}}$$

siendo $\lambda_{\alpha\beta}$ el recorrido libre medio de la colisión y $V_{T\beta}$ una velocidad característica de la especie β que coincide con la térmica cuando la velocidad relativa $|\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta|$ es pequeña frente a esta última.

4.2. Fuerzas entre partículas

Para la fricción de iones y electrones ($\alpha = i, e$) con un fondo uniforme de átomos neutros podemos emplear las expresiones de un plasma clásico,

$$\mathbf{R}_{a\alpha} = -\mu_{a\alpha} n_a \nu_{a\alpha} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_\alpha) \quad , \quad \nu_{a\alpha} = n_a \mu_{a\alpha} \sigma_{a\alpha} V_{T\alpha} \quad (4)$$

en donde $\mu_{a,\alpha}$ será la masa reducida, $\sigma_{a\alpha}$ la sección eficaz de colisión correspondiente y $V_{T\alpha} = (8\pi K_B T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ la velocidad térmica de la especie considerada. En general tendremos que,

$$\nu_{ae}, \nu_{ai}, \nu_{ad} \ll \omega_p$$

Por ejemplo, entre los átomos neutros y los electrones se tiene la siguiente fuerza de fricción por unidad de volumen,

$$\mathbf{R}_{ae} = -\mu_{ae} n_a \nu_{ae} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_e) = -\rho_a \nu_{ae} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_e)$$

donde ν_{ae} la frecuencia de colisiones elásticas.

Hay que recordar que estas expresiones son válidas siempre que las velocidades de arrastre relativas $|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_e|$ sean pequeñas comparadas con las térmicas $V_{T\alpha}$ de las especies involucradas, en caso contrario hay que considerar las correcciones correspondientes. Asimismo se considera que la sección eficaz de colisión es aproximadamente constante para el rango de energías involucradas.

Para la fricción entre partículas cargadas suele emplearse una expresión análoga a [4] cambiando la frecuencia de colisión. Puede probarse que tomando $\tau = \lambda_{ei}/V_{th}$ y $n_e = n_i = n$ los tiempos de colisión entre en el sistema MKS son,

$$\tau_e = \frac{6\sqrt{2} \pi^{3/2} \epsilon_o \sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{\Lambda e^4 n} \quad (5)$$

y para los iones

$$\tau_i = \frac{12 \pi^{3/2} \epsilon_o \sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{\Lambda e^4 n} \quad (6)$$

respectivamente. La cantidad Λ se denomina *logaritmo de Coulomb* y que viene del operador de colisión siendo igual al logaritmo de la razón entre los parámetros de impacto máximo y mínimo $\Lambda = \ln(d_{max}/d_{min})$. El d_{min} es la distancia de aproximación más corta $d_{min} \simeq r_c = e^2/4\pi\epsilon_o T$ que viene determinada simplemente por,

$$\frac{m_{e,i} u_{e,i}^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r_c} = 0$$

mientras que $d_{max} = \lambda_d$ puesto que el potencial eléctrico se encuentra apantallado para distancias mayores que la longitud de Debye. El logaritmo de Coulomb es una función que varía muy suavemente con la densidad y la temperatura del plasma.

4.3. Fuerzas sobre los granos de polvo.

El problema mas complejo es determinar las fuerzas de fricción $\mathbf{R}_d = n_d \mathbf{F}_d$ entre los granos sólidos y las demás partículas del plasma. Podemos escribir la fuerza total \mathbf{F}_d sobre cada grano de la forma,

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ar},$$

siendo \mathbf{F}_{ar} la fuerza de arrastre que causan sobre la partícula sólida las demás especies presentes en el plasma. Las dos fuerzas mas inmediatas son las causadas por campos externos, como la fuerza de gravedad $\mathbf{f}_g = m_d \mathbf{g}$ que proporciona una fuerza por unidad de volúmen,

$$\mathbf{F}_g = n_d \mathbf{f}_g = \rho_d \mathbf{g}$$

y para la fuerza que ejerce el campo eléctrico $\mathbf{f}_e = q_d (\mathbf{E} + \mathbf{u}_d \wedge \mathbf{B})$

$$\mathbf{F}_e = n_d \mathbf{f}_e = \rho_{ed} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_d \wedge \mathbf{B})$$

El efecto de los electrones puede despreciarse en general debido a su escasa masa frente a la del grano, apenas transfieren a este cantidad de movimiento a las partículas sólidas. Las fuerzas de arrastre \mathbf{F}_{ar} serán causadas principalmente por los iones y el fondo de átomos neutros y se descompone en los siguientes términos,

$$\mathbf{F}_{ar} = \mathbf{F}_{di} + \mathbf{F}_{da} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_{rad}$$

en donde cada sumando representa:

- *La fuerza de arrastre de los iones sobre los granos, $\mathbf{F}_{di} = \mathbf{F}_{col} + \mathbf{F}_{coul} + \mathbf{F}_{fl}$ causada por las colisiones por impacto directo \mathbf{F}_{col} , las colisiones de tipo coulomb, \mathbf{F}_{coul} o arrastre debido al movimiento relativo entre ambas especies, \mathbf{F}_{fl} .*
- *La fuerza de arrastre de los átomos neutros sobre los granos, \mathbf{F}_{da} que es originada por las colisiones elásticas de estos sobre la superficie del grano.*
- *Fuerza térmica, \mathbf{F}_T debida a los gradientes de temperatura ∇T_a presentes en el gas neutro de fondo.*
- *La presión de radiación: En particular en el espacio, al encontrarse inmersos en un campo de radiación intenso, los granos pueden adquirir cantidad de movimiento de dicho campo.*

Estudiaremos a continuación las mas importantes y sus expresiones aproximadas en algunos límites de interés práctico.

4.3.1. Fuerza de arrastre de los átomos neutros.

La fuerza de arrastre \mathbf{F}_{da} corresponde al intercambio de cantidad de movimiento originado por las colisiones elásticas entre los granos de polvo y el fondo de átomos neutros. Existen dos regímenes posibles que se clasifican de acuerdo con el número de Knudsen ($Kn = \lambda_{d\alpha}/r_d$, con $\alpha = i, a$ donde $\lambda_{d\alpha}$ es el recorrido libre medio correspondiente) entre dos límites puesto que si $Kn \gg 1$ nos encontraríamos en un régimen cinético y en caso contrario $Kn \ll 1$ sería hidrodinámico.

Esta última situación corresponde a presiones altas y la fuerza correspondiente vendría dada simplemente por la fórmula de Stokes resultando proporcional a la velocidad \mathbf{u}_d y al radio r_d de la partícula. Por el contrario, para presiones bajas (por debajo del Torr) donde $\lambda_{da} > 100 \mu m$ y $r_d < 1 - 100 \mu m$ esta aproximación no es válida y se describe la interacción de un grano con un átomo neutro en este régimen se consideran dos modelos: En el primero la superficie del grano es aproximada por una esfera dura y la componente de la velocidad del átomo neutro \mathbf{u}_a perpendicular a la superficie del mismo se invierte en el choque (reflexión). En el segundo, el neutro es adsorbido por la superficie y reemitido posteriormente (reflexión difusa). En ambos casos hay que evaluar la cantidad de movimiento intercambiada en el proceso.

Para una reflexión perfecta si la distribución de velocidades de los neutros es de Maxwell Boltzmann [Braines *et al*, 1965] se tiene,

$$\mathbf{F}_{da} = -\sqrt{2\pi} (r_d^2 m_a n_a) V_{Ta} H(s) (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a)$$

en donde \mathbf{u}_a es la velocidad del fluido de gas neutro y $V_{Ta} = \sqrt{K_B T_a / m_a}$. La función $H(s)$ es,

$$H(s) = \frac{1}{s} \left[\left(s + \frac{1}{s} \right) \exp(-s^2) + \sqrt{\pi} \left(s^2 + 1 - \frac{1}{4s^2} \right) \text{fer}(s) \right]$$

donde a su vez $\text{fer}(s)$ es la función de error y $s = |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a| / \sqrt{2} V_{Ta}$. En el modelo de reflexión difusa perfecta, la fuerza de arrastre se obtiene reemplazando en la expresión anterior $H(s)$ por $H(s) + \pi/3$. La siguiente expresión alternativa [Draine y Salpeter, 1979] precisa dentro de un 1% de error para todas las velocidades y exacta en límites $s \rightarrow \infty$ y $s \rightarrow 0$,

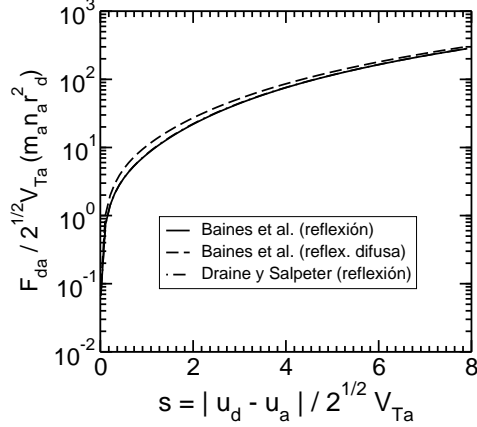
$$\mathbf{F}_{da} = -\frac{8}{3} \sqrt{1 + \frac{9\pi}{64} s^2} \sqrt{2\pi} (r_d^2 m_a n_a) V_{Ta} (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a)$$

En estas fórmulas se ha considerado una reflexión difusa perfecta, que no tienen en cuenta las interacciones de los átomos del gas neutro con la superficie del grano que depende de la naturaleza del mismo. Se considera en estos casos un denominador *coeficiente de acomodación* α_{ac} que corrige las expresiones anteriores para incluir dicho efecto.

En el límite $s \ll 1$, cuando la velocidad relativa $|\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a|$ es pequeña en comparación con la velocidad térmica del gas neutro V_{Ta} , se obtiene una expresión mas simple para la reflexión denominada *relación de Epstein*,

$$\mathbf{F}_{da} = -\sqrt{2\pi} (r_d^2 m_a n_a) V_{Ta} (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a)$$

y para la reflexión difusa perfecta,



$$\mathbf{F}_{da} = -\frac{8}{3} \left(1 + \frac{\pi}{8}\right) \sqrt{2\pi} (r_d^2 m_a n_a) V_{Ta} (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a)$$

ambas relaciones son de aplicación en la mayor parte de los casos de interés en plasmas de laboratorio. En el límite contrario, cuando $s \gg 1$ la fórmula aproximada para la fuerza de arrastre es la misma tanto para la reflexión especular como para la difusa,

$$\mathbf{F}_{da} = -\pi (r_d^2 m_a n_a) |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a| (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a).$$

El valor relativo de todas estas expresiones se compara en la Fig. 6, representando

$$A(s) = F_{da} / \sqrt{2} V_{Ta} (r_d^2 m_a n_a)$$

frente a $s = |\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a| / \sqrt{2} V_{Ta}$, de modo que se aprecie el efecto de la velocidad relativa entre el fondo de átomos neutros y el fluido de granos de polvo. Como puede comprobarse las diferencias entre todas las expresiones anteriores son bastante pequeñas y existe un límite asintótico cuando $s \gg 1$ en el que $A(s) \simeq \pi\sqrt{2}$.

En el límite contrario $s \ll 1$ se recuperan las fórmulas de Epstein. Desarrollando en potencias de s tendremos para la expresión de Baines *et al.* (reflexión especular),

$$F_{da} / \sqrt{2} V_{Ta} (r_d^2 m_a n_a) \simeq \frac{8}{3} \sqrt{2\pi} s + \frac{8}{15} \sqrt{2\pi} s^3 + O(s^5)$$

mientras que para la reflexión difusa basta reemplazar el $8/3$ por $(8 + \pi)/3$. Para la otra fórmula resulta,

$$F_{da} / \sqrt{2} V_{Ta} (r_d^2 m_a n_a) \simeq \frac{8}{3} \sqrt{2\pi} s + \frac{3\pi^{3/2}}{8\sqrt{2}} s^3 + O(s^5).$$

4.3.2. Fuerza de arrastre de los iones.

Para la transferencia de cantidad de movimiento entre iones y los granos de polvo podemos escribir,

$$\mathbf{F}_{di} = \mathbf{F}_{col} + \mathbf{F}_{cul} + \mathbf{F}_{fl}.$$

Donde los tres modos principales son

- Las colisiones por impacto directo entre iones y granos de polvo \mathbf{F}_{col} .
- Los choques entre ambos como partículas cargadas \mathbf{F}_{cul} .
- La fuerza de arrastre (colectiva) que el fluido iónico ejerce sobre los granos \mathbf{F}_{fl} .

La última es difícil de calcular y no la estudiaremos en estas notas, en realidad tiene un efecto pequeño sobre los granos de polvo en los plasmas de nuestro interés. Los dos primeros términos dependen del valor del potencial del grano de polvo φ_p y corresponden a la fuerza \mathbf{F}_{col} originada por el cambio de cantidad de movimiento originado por los iones del plasma que alcanzan el grano de polvo, bien porque son atraídos o porque superan la barrera de potencial y colisionan con el mismo. Para un plasma en el que los granos de polvo permanecen en reposo esta fuerza puede expresarse como,

$$\mathbf{F}_{di}^{a,b} = -n_i m_i \sigma_c^{a,b} V_{Ti} (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_i)$$

siendo $V_{Ti} = (u_i^2 + 8K_b T_i / \pi m_i)^{1/2}$ la velocidad total del ion. Aquí $\sigma_c^{a,b}$ representa una sección eficaz de colisión para la transferencia de cantidad de movimiento mediante (a) colección de iones por impacto directo y/o (b) colisiones electrostáticas de tipo Coulomb. Esta última ha de expresarse como función del potencial de la superficie del grano φ_p y de la energía cinética del ion $m_i u_i^2 / 2$.

En el caos de encontrarnos en el límite $a \gg \lambda_D \gg r_d$ podemos emplear el modelo OML de colección de iones y se obtiene,

$$\sigma_c^a = \pi r_d^2 \left(1 - \frac{2e\varphi_d}{m_i u_i^2} \right)$$

suponiendo que el arrastre debido a la colección es igual al causado por la colección de corriente iónica.

donde suponemos que la sección eficaz para la transferencia de cantidad de movimiento en este proceso es igual a la sección eficaz de colección de corriente iónica.

Para evaluar el arrastre debido a las fuerzas de Coulomb tendremos que expresar la sección eficaz σ_c^b para la transferencia de cantidad de movimiento en función del parámetro de impacto b ,

$$\sigma_c^b = 4\pi b_o^2 \int_{b_c}^{\lambda_{De}} \frac{b db}{b_o^2 + b^2}$$

en donde $b_o = r_d e \varphi_d / m_i u_i^2$ es el parámetro correspondiente a una deflexión de 90° y b_c el de una colisión directa,

$$b_c = r_d \left(1 - \frac{2e\varphi_d}{m_i u_i^2} \right)$$

Hay que notar que b_c se utiliza para excluir los iones colectados del cálculo de las fuerzas de arrastre de Coulomb. Puesto que si elegimos como límite superior de integración en σ_c^b el infinito la integral diverge por lo que se introduce un corte superior λ_{De} que es la longitud de apantallamiento en este caso. Esto es debido a que bajo la acción del campo eléctrico los iones adquieren velocidades de arrastre grandes comparadas con su velocidad térmica y no son capaces de formar una vaina electrostática alrededor del grano, que esta constiuída por un defecto de electrones con una anchura aproximada de λ_{De} . Integrando la ecuación anterior se obtiene finalmente,

$$\sigma_c^b = 2\pi b_o^2 \ln \left(\frac{b_o^2 + \lambda_{De}^2}{b_o^2 + b_c^2} \right)$$

4.4. Ecuaciones de transporte

The fluid velocities of charged species (u_e, u_i, u_d) are considered in the frame where the neutral atom background remains at rest. The fluid equations in one dimension are,

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_d u_d) = 0 \quad (7)$$

$$m_d n_d \left(\frac{\partial u_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial z} \right) - e Z_d n_d \frac{\partial \varphi}{\partial z} + m_d n_d \nu_{da} u_d + m_d n_d \nu_{di} (u_d - u_i) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_i u_i) = G - R_o \quad (9)$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) + e n_i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + K_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial z} + (G - R_o) m_i u_i + m_i n_i \nu_{ia} u_i + m_i n_i \nu_{id} (u_i - u_d) = 0 \quad (10)$$

$$n_e = n_{eo} \exp(e\varphi/K_B T_e) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{e}{\epsilon_o} (n_i - n_e - Z_d n_d) \quad (12)$$

The equations 7 and 8 are the continuity and momentum transport equations for dust grains which collide with neutral atoms and ions with frequencies ν_{da} and ν_{di} . The Eq. 9 is also the continuity equation for ion flow with charge source G and sink R_o terms as discussed above. In Eq. 10 the term $(G - R_o) m_i u_i$ accounts for changes in momentum of the ion fluid associated to ionization and recombination events. Electrons are considered as Maxwellians in Eq. 11 and Poisson equation 12 relates the fluctuations of plasma potential φ with charged particle densities.

The collision frequency between dust and neutral atoms may be approximated by $\nu_{da} \simeq \pi a^2 n_a V_{aT}$ where a is the grain radius and $V_{aT} = \sqrt{K_B T_a / m_a}$.

The elastic collision cross section for momentum transfer between ions and neutral atoms σ_{ia} will be considered independent of energy leading to a constant collision frequency $\nu_{ia} = n_a \sigma_{ia} c_{is}$, where $c_{is} = \sqrt{K_B T_e / m_i}$ represents the ion acoustic speed and the ion thermal velocity is $c_{iT} = c_{is} \sqrt{T_e / T_i}$.

The collision frequency ν_{id} between ions and dust grains caused by ion drag force will be calculated as in and the momentum conservation relates two terms in equations 8 and 10,

$$m_d n_d \nu_{di} (u_d - u_i) + m_i n_i \nu_{id} (u_i - u_d) = 0$$

Therefore,

$$\nu_{di} = \frac{m_i n_i}{m_d n_d} \nu_{id} \ll \nu_{id}.$$

This expression reflects the fact that ions experience more frequent collisions with momentum exchange than dust grains.

5. Ondas acusticas en un plasma granular.

En un plasma granular uniforme, no magnetizado y sin colisiones donde el acoplo entre los granos cargados causado por la fuerzas eléctricas es débil existen dos modos acústicos principales: La onda acústica de los granos (dust-acoustic wave, DA) y la onda acústica ión-grano (dust ion-acoustic wave, DIA).

5.1. Onda acústica para los granos de polvo (DA)

La velocidad de fase de la onda acústica DA es mas pequeña que las térmicas de los iones y electrones, que establecen el potencial de equilibrio.

La inercia de los granos es importante para las ondas DA por lo que consideramos las ecuaciones linealizadas de continuidad y transporte de la cantidad de movimiento,

$$\frac{\partial n_{d1}}{\partial t} + n_{d0} \nabla \cdot \mathbf{u}_{d1} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{d1}}{\partial t} \pm \frac{eZ_d}{m_d} \nabla \varphi - \frac{3K_B T_d}{m_d n_{d0}} \nabla n_{d1} = 0 \quad (14)$$

Aquí φ_1 y \mathbf{u}_{d1} son las de la perturbación del potencial eléctrico y velocidad del fluido de granos de polvo. El gradiente de presión esta equilibrado por la fuerza eléctrica y aproximamos las densidades perturbadas de iones y electrones por,

$$n_{e1} \simeq n_{e0} \frac{e\varphi_1}{K_B T_e} \quad n_{i1} \simeq n_{i0} \frac{e\varphi_1}{K_B T_i}.$$

El sistema de ecuaciones se cierra con la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_{i1} \pm Z n_{d1} - n_{e1}). \quad (15)$$

Combinamos las dos ecuaciones para los granos de polvo tomando la divergencia en la segunda y derivando respecto del tiempo la primera,

$$\frac{\partial^2 n_{d1}}{\partial t^2} - 3V_{Td}^2 \nabla^2 n_{d1} = \mp \frac{Ze}{m_d} \nabla^2 \varphi_1. \quad (16)$$

Substituimos en la ecuación de Poisson las densidades electrónica y iónica,

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{e}{\epsilon_o} \left(\frac{e n_{eo}}{K_B T_e} \varphi_1 + \frac{e n_{io}}{K_B T_i} \varphi \pm Z n_{d1} \right)$$

e introducimos la longitud característica $1/\Lambda_D^2 = 1/\Lambda_{De}^2 + 1/\Lambda_{Di}^2$, de modo que esta ecuación se transforma en

$$\nabla^2 \varphi_1 + \frac{1}{\Lambda_D^2} \varphi_1 = \mp \frac{Ze}{\epsilon_o} n_{d1}. \quad (17)$$

En las ecuaciones [16] y [17] solo aparecen como incógnitas las amplitudes φ_1 y n_{d1} pues hemos eliminado todas las demás. Introducimos perturbaciones de la forma $n_{d1} = n_{d1}^o \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ y $\varphi_1 = \varphi_1^o \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ con lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + 3V_{Td}^2 k^2) n_{d1}^o \pm \frac{Ze}{m_d} k^2 \varphi_1^o &= 0 \\ -(k^2 + \frac{1}{\Lambda_D^2}) \varphi_1 \mp \frac{Ze}{\epsilon_o} n_{d1}^o &= 0 \end{aligned}$$

Para que tenga solución distinta de la trivial ha de ser nulo el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3V_{Td}^2 k^2 - \omega^2 & \pm Ze k^2 / m_d \\ \mp Ze / \epsilon_o & -(k^2 + \frac{1}{\Lambda_D^2}) \end{vmatrix} = 0$$

del que obtendremos la ecuación para la relación de dispersión $\omega(k)$,

$$(3V_{Td}^2 k^2 - \omega^2) (k^2 + \frac{1}{\Lambda_D^2}) - \omega_{pd}^2 k^2 = 0$$

donde se ha introducido la frecuencia de plasma para los granos de polvo $\omega_{pd}^2 = e^2 Z^2 n_{do} / \epsilon_o m_d$ y operando,

$$1 + \frac{1}{\Lambda_D^2 k^2} - \frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2 - 3V_{Td}^2 k^2} = 0$$

Finalmente, la relación de dispersión resulta ser,

$$\omega^2(k) = 3V_{Td}^2 k^2 + \omega_{pd}^2 \frac{k^2 \Lambda_D^2}{1 + k^2 \Lambda_D^2}. \quad (18)$$

La inercia de las ondas acústicas DA es causada por la gran masa de los granos de polvo mientras que la fuerza restauradora viene de las presiones que ejercen los electrones y iones. Consideramos que estos últimos responden instantáneamente a las fluctuaciones del potencial eléctrico sobre esta escala de tiempos. como térmicos. Podemos despreciar el primer sumando ya que $\omega \gg kV_{Tw}$ y definimos la velocidad acústica para los granos de polvo $C_{DA} = \omega_{pd} \Lambda_D$,

$$\omega_{DA}(k) = \frac{k C_{DA}}{\sqrt{1 + k^2 \Lambda_D^2}}$$

Su frecuencia resulta mucho mas pequeña que ω_{pd} y su velocidad de fase de las mismas puede ser estimada $V_\theta = \omega_{DA}/k$ que se encuentra en las decenas de Herzs para plasmas de laboratorio. Finalmente, podemos desarrollar en serie [18] para $s^2 = k^2 \Lambda_D^2 \ll 1$ con lo que resulta,

$$\Lambda_{DA} \frac{\omega^2(k)}{C_{DA}^2} = \frac{s}{1 + s^2} \simeq s - \frac{s^3}{2} + O(s^4)$$

con lo que reteniendo el primer término y substituyendo los valores correspondientes queda simplemente $\omega \simeq k C_{DA}$. Si substituímos los valores correspondientes,

$$C_{DA}^2 = \omega_{pd}^2 \Lambda_D^2 = Z^2 \frac{n_{do}}{n_{io}} \frac{K_B T_i}{m_d} \left(\frac{1}{1 + n_{eo} K_B T_i / n_{io} K_B T_e} \right)$$

en donde $n_{eo} = n_{io} \pm Z n_{do}$. Algunas veces esta última relación se invierte, de modo que aparezca la temperatura electrónica en lugar de la iónica simplemente haciendo,

$$C_{DA}^2 = \omega_{pd}^2 \Lambda_D^2 = \omega_{pd}^2 \lambda_{De}^2 \frac{\lambda_{Di}^2}{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}$$

que da lugar a que,

$$C_{DA}^2 = \omega_{pd}^2 \Lambda_D^2 = Z^2 \frac{n_{do}}{n_{io}} \frac{K_B T_e}{m_d} \left(\frac{1}{1 + n_{io} K_B T_e / n_{eo} K_B T_i} \right)$$

donde se aproxima el paréntesis por la unidad.

5.2. Onda acústica ion-grano (DIA).

La velocidad de fase de las ondas DIA es mas pequeña que la velocidad térmica de los electrones y mas grande que las térmicas de los iones y de la correspondiente velocidad para los granos de polvo. Para estudiarlas, seguiremos tomando los electrones como térmicos, pero

no en el caso de los iones cuyas ecuaciones linealizadas de continuidad y de transporte de cantidad de movimiento son,

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_{io} \nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{i1}}{\partial t} + \frac{e}{m_i} \nabla \varphi - \frac{3K_B T_i}{m_i n_{io}} \nabla n_{i1} = 0 \quad (20)$$

Combinandolas lo mismo que antes, resulta para la los iones,

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} - 3V_{Ti}^2 \nabla^2 n_{i1} - \frac{e}{m_i} \nabla^2 \varphi_1 = 0. \quad (21)$$

Por ser térmicos los electrones, la perturbación de la densidad electrónica asociada a una onda DIA viene dada por,

$$n_{e1} \simeq n_{eo} \frac{e\varphi_1}{K_B T_e}. \quad (22)$$

lo que introduce un pequeño cambio en la ecuación de Poisson linealizada respecto de la empleada para las ondas DA [12] ya que tendremos

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{e^2 n_{eo}}{\epsilon_o K_B T_e} \varphi_1 - \frac{e}{\epsilon_o} n_{i1} \mp \frac{Ze}{\epsilon_o} n_{d1}.$$

Finalmente,

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{\lambda_{De}^2} \varphi_1 - \frac{e}{\epsilon_o} \mp \frac{Ze}{\epsilon_o} n_{d1}. \quad (23)$$

Para obtener la relación de dispersión para las las ondas DIA tomamos los electrones como térmicos y los granos de polvo se mueven con las ecuaciones de movimiento[13] y [14] pero al contrario que para las ondas DA, los iones se mueven también según las ecuaciones fluidas [19] y [20]. Si introducimos como antes perturbaciones sinusoidales en [16] y [21] cerrando el sistema con [22] y la ecuación de Poisson linealizada [23] obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que son las amplitudes de perturbación,

$$\begin{aligned} (3V_{Ti}^2 k^2 - \omega^2) n_{i1}^o - \frac{e n_{io}}{m_i} k^2 \varphi_1^o &= 0 \\ (3V_{Td}^2 k^2 - \omega^2) n_{d1}^o \mp \frac{Ze n_{do}}{m_d} k^2 \varphi_1^o &= 0 \\ (k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2}) \varphi_1^o + \frac{e}{\epsilon_o} n_{i1}^o \pm \frac{Ze}{\epsilon_o} n_{d1}^o &= 0 \end{aligned}$$

La relación de dispersión se obtiene de nuevo haciendo nulo el determinante correspondiente, lo que conduce a que $\omega(k)$ venga dada por las raíces del siguiente polinomio:

$$(3V_{Ti}^2 k^2 - \omega^2) (3V_{Td}^2 k^2 - \omega^2) \left(k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2}\right) + \omega_{pe}^2 k^2 (3V_{Ti}^2 k^2 - \omega^2) + \omega_{pe}^2 k^2 (3V_{Td}^2 k^2 - \omega^2) = 0. \quad (24)$$

Nos es preciso ahora hacer alguna aproximación, y es que las raíces de este polinomio han de satisfacer que $\omega \gg kV_{Ti}$ y también que $\omega \gg kV_{Td}$ de modo si despreciamos los términos correspondientes la relación de dispersión se simplifica,

$$-\omega^2 \left(k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2}\right) + \omega_{pe}^2 k^2 + \omega_{pe}^2 k^2 = 0.$$

y tenemos,

$$1 + \frac{1}{\lambda_{De}^2 k^2} - \frac{\omega_{pd}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2} k^2 = 0$$

Por último, como $\omega_{pd} = \omega_{pi} \sqrt{m_i/m_d}$ podemos asimismo resultando,

$$\omega_{DIA}(k) = \omega_{pi} \frac{\lambda_{De} k}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}}. \quad (25)$$

Como en el caso anterior podemos definir una velocidad $C_{DIA}^2 = \omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 = n_{io}/n_{eo} C_{is}^2$ en donde C_{is} es la velocidad ion acústica clásica. En el caso de que los granos se encuentren cargados negativamente, $n_{io} > n_{eo}$ para que exista equilibrio de cargas en el estado no perturbado. Si desarrollamos en serie [25] para valores pequeños $\lambda_{De} k \ll 1$, la velocidad de fase $V_\theta = \omega_{DIA}/k \simeq C_{DIA} > C_{is}$ resulta ser mayor que la velocidad ion acústica, mientras que para granos cargados positivamente se da el caso contrario.

5.3. Otra aproximación a las ondas DIA.

Para determinar las aproximaciones podemos adimensionalizar el polinomio [24]

5.4. Adimensionalización.

Para ver el significado de ambos modos primero hemos de adimensionalizar las ecuaciones [18] desarrollando las potencias y sin efectuar ninguna aproximación llegaremos al siguiente polinomio de cuarto orden $\omega^4 - A(k)\omega^2 + B(k) = 0$ en donde,

$$A(k) = 3 \left(V_{Ti}^2 + V_{Td}^2\right) k^2 + (\omega_{pi}^2 + \omega_{pd}^2) \frac{\lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2}$$

$$B(k) = 9V_{Ti}^2 V_{Td}^2 k^2 + 3 \left(V_{Ti}^2 + V_{Td}^2\right) k^2 + 3 \left(\omega_{pd}^2 V_{Ti}^2 + \omega_{pi}^2 V_{Td}^2\right) \frac{\lambda_{De}^2 k^4}{1 + \lambda_{De}^2 k^2}$$

Podemos definir una variable adimensional $l = \lambda_{De} k$ de modo que resulta