Laboratorio de Física Aplicada

Resumen de cálculo de errores

1 Introducción

Cuando una magnitud Y se mide en el laboratorio, su valor no coincide exáctamente con su valor real. A la diferencia se le conoce como error

$$Error = Y_{medido} - Y_{real} \tag{1}$$

Dicho error no se puede determinar, ya que en caso contrario seríamos capaces de conocer el valor de la medida con infinita precisión. Sin embargo, es posible calcular una cota superior que se denomina incertidumbre de la medida y que denotaremos por ΔX. **Todas las magnitudes deben expresarse de la siguiente manera**

$$(\bar{Y} \pm \Delta Y)\ unidades \tag{2}$$

donde $\bar{Y}$ es el valor más probable de la medida y ΔY acota el intervalo en el cual se encuentra el valor real de la medida. A continuación se detalla el procedimiento para calcular Y y ΔY.

2 Medidas directas

En una medida directa existen dos contribuciones a la incertidumbre:

1. *Incertidumbre sistemática.* Esta fuente de error es debida principalmente a la precisión finita del aparato. Por ello la incertidumbre sistemática ΔY_s suele estimarse como la mitad del error de escala del aparato. Además puede haber otros factores no aleatorios que degraden la medida y en cada caso la técnica para estimar esta contribución depende del experimento particular. Por ejemplo, si se mide el tiempo con un cronómetro, además del error de escala habrá que tener en cuenta el tiempo de reacción de la persona que realiza el experimento.

2. *Incertidumbre aleatoria.* Esta incertidumbre es debida a efectos ambientales aleatorios tales como fluctuaciones en la temperatura o vibraciones asi como a variaciones en las características de los equipos utilizados en el experimento. Por ejemplo, si se realiza un experimento con un laser, la intensidad del haz producida por el equipo puede variar en el tiempo y/o cada vez que se repite el experimento. La manera de acotar el error aleatorio es repetir la medida N veces Y_1, Y_2... Y_N, lo cual nos proporciona el valor más probable

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{3}$$

y la incertidumbre aleatoria

$$\Delta Y_a = t_{N-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2} \tag{4}$$

donde s se denomina dispersión y t_n es la función t de Student (ver tabla 1).

Una vez conocidas las incertidumbres sistemáticas y aleatorias, la incertidumbre total se calcula con

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta Y_s^2 + \Delta Y_a^2} \tag{5}$$

t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{14}	t_∞
4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.14	1.96

Table 1: Algunos valores de la function t-Student

3 Medidas indirectas

Las medidas indirectas son aquellas magnitudes que no medimos en el laboratorio sino que se calculan a traves de alguna relación matemática. Por ejemplo, supongamos que Y es una medida indirecta que dependen de n magnitudes directas $X_1 \pm \Delta X_1$, $X_2 \pm \Delta X_2$... $X_n \pm \Delta X_n$:

$$Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) \tag{6}$$

La incertidumbre ΔY se calcula de la siguiente manera

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta X_2\right)^2 + ... \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\Delta X_n\right)^2} \tag{7}$$

4 Ajuste por mínimos cuadrados

Supongamos que tenemos una coleción de parejas de variables (X_i, Y_i), $i = 1...N$ (directas o indirectas) cuya relación se sabe que es lineal

$$Y = aX + b \tag{8}$$

Los coeficientes a y b y sus incertidumbres asociadas Δa y Δb de la recta que mejor se aproxima a dichos puntos viene dada por

$$a = \frac{E}{D} \qquad b = \bar{Y} - m\bar{X} \qquad \Delta a = t_{n-2}s_a \qquad \Delta b = t_{n-2}s_b \tag{9}$$

donde

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \qquad E = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i\right) - N\bar{X}\bar{Y} \qquad D = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - N\bar{X}^2 \tag{10}$$

$$s_a = \frac{s_{res}}{\sqrt{D}} \qquad s_b = s_{res}\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{D}} \qquad s_{res} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - aX_i - b\right)^2} \tag{11}$$

5 Ejemplo

Imaginemos que tenemos una coleción de 10 péndulos con longitudes distintas y queremos calcular la constante de gravedad g. Con cada péndulo k procedemos de la siguiente manera

1. Con una regla medimos su longitud 5 veces. Con la Eq. 3 calculamos el valor medio $\bar{l}_k$. La mitad del error de escala es igual a la incertidumbre sistemática y la aleatoria se calcula con la Eq. 4. La incertidumbre total Δl_k se obtiene con la Eq. 5.

2. Con un cronómetro se mide el periodo 5 veces. Como es una medida directa su valor medio $\bar{T}_k$ y su incertidumbre ΔT_k se calcula de manera idéntica al caso de la longitud.

3. Definimos una variable auxiliar $Y_k(T_k) \equiv 1/\omega_k^2 = T_k^2/(4\pi^2)$. Conocido el valor de $\bar{T}_k$ se calcula $\bar{Y}_k$ y usando la Eq. 7 y ΔT_k se obtiene ΔY_k.

Repitiendo el procedimiento anterior con todos los péndulos se construye una tabla $(\bar{l}_k \pm \Delta l_k, \bar{Y}_k \pm \Delta Y_k)$. Como $\omega^2 = g/l$ la relación entre l e Y es lineal y se puede realizar un ajuste por mínimos cuadrados. La pendiente del ajuste proporciona la gravedad g y su error Δg (Eqs. 9-11).